UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Zufallsmatrizen und freie Entropie
Wintersemester 2013/2014

Blatt 6
Abgabe: Donnerstag, 28.11., in der Vorlesung

Aufgabe 1. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also ein Maßraum mit $\mu(X) = 1$. Für $f \in L^\infty(X, \mu)$ betrachten wir den Multiplikationsoperator

$$M_f : \ L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu), \ g \mapsto fg.$$

Zeigen Sie:

(a) Der Operator M_f ist beschränkt mit $\|M_f\| = \|f\|_\infty$ und es gilt $M_f^* = M_{\overline{f}}$.

(b) $(\mathcal{M}, \tau)$ mit $\mathcal{M} := \{M_f | \ f \in L^\infty(X,\mu)\} \subseteq B(L^2(X,\mu))$ und

$$\tau : \ \mathcal{M} \to \mathbb{C}, \ M_f \mapsto \langle M_f 1, 1\rangle = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

ist ein W^*-Wahrscheinlichkeitsraum mit Spur.

(c) Für alle $f \in L^2(X,\mu)$ ist die Fuglede-Kadison-Determinante von M_f bezüglich τ gegeben durch

$$\Delta(M_f) = \exp\left(\int_X \log|f(x)|\, d\mu(x)\right).$$

Konstruieren Sie anschließend auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ einen Operator $M \in B(L^2(X,\mu))$, der nicht invertierbar ist aber trotzdem $\Delta(M) \neq 0$ erfüllt.

Aufgabe 2. Seien $F_1, \dots, F_n$ nicht-kommutative Potenzreihen mit einem gemeinsamen Konvergenzmultiradius $(R_1, \dots, R_n)$. Seien weiter $G_1, \dots, G_n$ nicht-kommutative Potenzreihen mit einem gemeinsamen Konvergenzmultiradius $(\|F_1\|_{R_1,\dots,R_n}, \dots, \|F_n\|_{R_1,\dots,R_n})$.
Sei nun M ein Banachraum und seien $X_1, \dots, X_n \in M$ gegeben mit $\|X_j\| \le R_j$ für $j = 1, \dots, n$.
Zeigen Sie: Mit $F = (F_1, \dots, F_n)$, $G = (G_1, \dots, G_n)$ und $G \circ F := (G_1 \circ F, \dots, G_n \circ F)$ gilt die Kettenregel

$$(D(G \circ F))(X_1, \dots, X_n) = (DG)(F(X_1, \dots, X_n))(DF)(X_1, \dots, X_n).$$

bitte wenden

Aufgabe 3. Seien $F_1, \dots, F_n$ nicht-kommutative Potenzreihen in n (formalen) Variablen $t_1, \dots, t_n$ mit der Eigenschaft, dass $F_j^* = F_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt. Sei weiter $(R_1, \dots, R_n)$ ein gemeinsamer Konvergenzmultiradius von $F_1, \dots, F_n$.
Ferner seien selbstadjungierte Matrizen $A_1, \dots, A_n \in \mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ mit $\|A_j\| \leq R_j$ für $j = 1, \dots, n$ gegeben. Die Jacobi-Matrix

$$DF(A_1, \dots, A_n) = \big(\partial_{t_j} F_i(A_1, \dots, A_n)\big)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{M}_N(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{M}_N(\mathbb{C}))$$

zu $F = (F_1, \dots, F_n)$ können wir unter den üblichen Identifikationen

$$\mathrm{M}_n(\mathrm{M}_N(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{M}_N(\mathbb{C})) \cong \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{M}_N(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{M}_N(\mathbb{C}) \cong \mathrm{M}_{nN^2}(\mathbb{C})$$

sowohl als Element von $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{M}_N(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ als auch als Matrix in $\mathrm{M}_{nN^2}(\mathbb{C})$ auffassen. Somit können wir neben der Fuglede-Kadison-Determinante Δ (die bezüglich der unnormalisierten Spur $\mathrm{Tr}_n \otimes \mathrm{tr}_N \otimes \mathrm{tr}_N$ auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{M}_N(\mathbb{C}) \otimes \mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ gebildet wird) auf $DF(A_1, \dots, A_n)$ auch die übliche Determinante det anwenden.
Zeigen Sie, dass zwischen diesen beiden Größen der folgende Zusammenhang besteht:

$$\Delta(DF(A_1, \dots, A_n))^{N^2} = \det(DF(A_1, \dots, A_N))$$