UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Zufallsmatrizen und freie Entropie
Wintersemester 2013/2014

Blatt 7
Abgabe: Donnerstag, 5.12., in der Vorlesung

Aufgabe 1. Sei G eine diskrete Gruppe mit neutralem Element e. Auf der zugehörigen Gruppenalgebra $\mathbb{C}[G]$ betrachten wir wie in der Vorlesung das Funktional $\tau_0 : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}$, welches gegeben ist durch $\tau_0(\alpha) = \alpha(e)$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}[G]$. Zeigen Sie:

(a) τ_0 ist eine Spur.

(b) τ_0 ist treu, d.h. aus $\tau_0(\alpha^* * \alpha) = 0$ folgt bereits $\alpha = 0$.

Aufgabe 2. Sei $(\mathcal{A}, \phi)$ ein nicht-kommutativer Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie:

(a) Sind $\{a_1, a_2\}$ und $\{b_1, b_2\}$ frei unabhängig in $(\mathcal{A}, \phi)$, dann gilt

$$\phi(a_1 b_1 a_2 b_2) = \phi(a_1 a_2)\phi(b_1)\phi(b_2) + \phi(a_1)\phi(a_2)\phi(b_1 b_2) - \phi(a_1)\phi(a_2)\phi(b_1)\phi(b_2).$$

(b) Sind a und b frei unabhängig in $(\mathcal{A}, \phi)$ und gilt $ab = ba$, so ist

$$\phi\big((a - \phi(a)1)^2\big) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \phi\big((b - \phi(b)1)^2\big) = 0.$$

Aufgabe 3.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wie in der Vorlesung bezeichnen wir mit $\mathrm{NC}(n)$ die Menge der nicht-kreuzenden Partitionen auf $\{1, \dots, n\}$ und mit $\mathrm{NC}_2(2n)$ die Menge der nicht-kreuzenden Paarungen auf $\{1, \dots, 2n\}$. Zeigen Sie, dass

$$\#\,\mathrm{NC}(n) = \#\,\mathrm{NC}_2(2n) = C_n,$$

wobei C_n die n-te Catalan-Zahl bezeichnet.

Erinnerung. Die Catalan-Zahlen $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sind rekursiv bestimmt durch

$$C_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} C_{n-k} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Sei $(\mathcal{A}, \phi)$ ein nicht-kommutativer Wahrscheinlichkeitsraum und sei $s \in \mathcal{A}$ ein Element, das die Momente $\phi(s^{2n+1}) = 0$ und $\phi(s^{2n}) = C_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt. Bestimmen Sie die freien Kumulanten von s.