**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

**Übungen zur Vorlesung Zufallsmatrizen und freie Entropie**
Wintersemester 2013/2014

**Blatt 8**
**Abgabe:** Donnerstag, 19.12., in der Vorlesung

---

**Aufgabe 1.** Beweisen Sie Satz 10.1. der Vorlesung:

**Satz.** Sei $(M,\tau)$ ein $W^*$-Wahrscheinlichkeitsraum mit Spur und seien $X_i = X_i^* \in M$ für $i = 1,\dots,n$. Betrachte $\xi_1,\dots,\xi_n \in L^2(M,\tau)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\xi_1,\dots,\xi_n$ erfüllen die konjugierten Relationen für $X_1,\dots,X_n$.

(ii) Für alle $m \geq 1$, $1 \leq i(1),\dots,i(m) \leq n$ gilt

- $\kappa_1(\xi_{i(1)}) = 0$, falls $m = 1$.
- $\kappa_2(\xi_{i(1)}, X_{i(2)}) = \delta_{i(1),i(2)}$, falls $m = 2$.
- $\kappa_m(\xi_{i(1)}, X_{i(2)},\dots,X_{i(m)}) = 0$, falls $m \geq 3$.

**Aufgabe 2.** Sei $(\mathcal{A},\phi)$ ein nicht-kommutativer Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Beweisen Sie Satz 10.6. der Vorlesung: Für alle $a_0,a_1,\dots,a_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\begin{aligned}\kappa_n(a_0a_1,a_2,a_3,\dots,a_n) &= \kappa_{n+1}(a_0,a_1,a_2,\dots,a_n)\\ &\quad+\sum_{m=1}^{n}\kappa_m(a_1,a_2,\dots,a_m)\kappa_{n+1-m}(a_0,a_{m+1},a_{m+2},\dots,a_n).\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie: Ist $\phi$ eine Spur, so sind die Kumulanten $\kappa_n$, $n \in \mathbb{N}$, invariant unter zyklischen Permutationen ihrer Einträge, d.h. für alle $a_1,\dots,a_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\kappa_n(a_1,a_2,\dots,a_n) = \kappa_n(a_2,\dots,a_n,a_1).$$

(c) Wir nehmen an, dass alle Momente bezüglich $\phi$ invariant unter beliebigen Permutationen der Variablen sind, d.h. dass für alle $a_1,\dots,a_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, und alle Permutationen $\sigma$ von $\{1,\dots,n\}$ gilt

$$\phi(a_{\sigma(1)}\cdots a_{\sigma(n)}) = \phi(a_1\cdots a_n).$$

Sind dann auch die Kumulanten $\kappa_n$, $n \in \mathbb{N}$, invariant unter beliebigen Permutationen ihrer Einträge?

***bitte wenden***

**Aufgabe 3.** Sei $(M, \tau)$ ein $W^*$-Wahrscheinlichkeitsraum mit Spur und sei $S = S^* \in M$ ein Halbkreiselement, d.h. es gelte

$$\tau(S^n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} t^n \sqrt{4 - t^2}\, dt \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie: Ist $X = X^* \in M$ gegeben, so dass $X$ und $S$ frei sind, dann erfüllt die Cauchy-Transformierte $G(z, t) := G_{X+\sqrt{t}S}(z)$ von $X + \sqrt{t}S$ die komplexe Burger-Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial t}(z, t) + G(z, t) \frac{\partial G}{\partial z}(z, t) = 0 \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}^+,\ t \geq 0.$$