UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Zufallsmatrizen und freie Entropie
Wintersemester 2013/2014

Blatt 9
Abgabe: Donnerstag, 16.1., in der Vorlesung

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{F}(H)$ der volle Fockraum mit Vakuum Ω über einem komplexen Hilbertraum H (vgl. Bemerkung 11.3. (ii) der Vorlesung).
Für $f \in H$ mit $\|f\| = 1$ betrachten wir $X(f) := a(f) + a^*(f) \in B(\mathcal{F}(H))$, wobei wir mit $a(f)$ bzw. $a^*(f)$ den Linksvernichter bzw. Linkserzeuger zu f bezeichnen.

Zeigen Sie:

(a) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist die Reihe
$$\eta_z := \sum_{n=0}^{\infty} z^n f^{\otimes n} \qquad (f^{\otimes 0} := \Omega)$$
absolut konvergent in H und für $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < 1$ gilt
$$X(f)\eta_z = \Big(z + \frac{1}{z}\Big)\eta_z - \frac{1}{z}\Omega.$$

(b) Für alle $w \in \mathbb{C}^+$ gilt
$$\langle \big(w - X(f)\big)^{-1}\Omega, \Omega\rangle = G_S(w),$$
wobei G_S die Cauchy-Transformierte der Halbkreisverteilung bezeichnet. Der Operator $X(f)$ ist somit ein Halbkreiselement.

Aufgabe 2. Sei $-1 < q < 1$. Wir betrachten den q-Fockraum $\mathcal{F}_q(H)$ mit Vakuum Ω über einem komplexen Hilbertraum H (vgl. Definition 13.4. der Vorlesung).

Zeigen Sie:

(a) Für alle $f, g \in H$ besteht zwischen dem Vernichter $a(f)$ und dem Erzeuger $a^*(g)$ die q-Vertauschungsrelation
$$a(f)a^*(g) - qa^*(g)a(f) = \langle f, g\rangle 1.$$

(b) Für alle $f \in H$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\|f^{\otimes(n+1)}\|_q = \|f\|\sqrt{\frac{q^{n+1}-1}{q-1}}\,\|f^{\otimes n}\|_q \quad \text{und} \quad \|a(f)f^{\otimes n}\|_q = \|f\|\sqrt{\frac{q^n-1}{q-1}}\,\|f^{\otimes n}\|_q.$$

bitte wenden

(c) Definieren wir eine Folge $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Polynomen durch $H_0(x) := 1$, $H_1(x) := x$ und die Rekursion

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{q^n - 1}{q-1} H_{n-1}(x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

dann gilt

$$H_n(X(f))\Omega = f^{\otimes n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3.

(a) Wir bezeichnen mit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Tschebyscheff-Polynome erster und zweiter Art (vgl. Blatt 4). Zeigen Sie:

$$T_m(x)U_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(U_{n+m}(x) + U_{n-m}(x)), & n-m \geq 0 \\ \frac{1}{2}U_{n+m}(x), & n-m = -1 \\ \frac{1}{2}(U_{n+m}(x) - U_{m-n-2}(x)), & n-m \leq -2 \end{cases}$$

(b) Sei (M, τ) ein W^*-Wahrscheinlichkeitsraum mit Spur. Weiter sei $X \in M$ gegeben, so dass

$$\xi := 4\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_n(X) \qquad \text{mit} \qquad \alpha_n := \tau(U_{n-1}(X)),\ n \in \mathbb{N}$$

zu $L^2(M, \tau)$ gehört. Zeigen Sie, dass

$$\tau \otimes \tau(\partial_X P(X)) = \tau(\xi P(X)) \qquad \text{für alle } P \in \mathbb{C}\langle X \rangle,$$

d.h. ξ ist die konjugierte Variable zu X.