UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Zufallsmatrizen und freie Entropie
Wintersemester 2013/2014

Blatt 10
Abgabe: Donnerstag, 23.1., in der Vorlesung

Aufgabe 1. Gegeben sei $-1 < q < 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{und} \qquad [n]_q! := [1]_q[2]_q \cdots [n]_q$$

sowie speziell $[0]_q := 0$ und $[0]_q! := 1$. Weiter sei $\mathcal{F}_q(H)$ der q-Fockraum mit Vakuum Ω über einem komplexen Hilbertraum H. Wir betrachten den Operator $X(f) = a^*(f) + a(f)$ für ein $f \in H$ mit $\|f\| = 1$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\|f^{\otimes n}\|_q = \sqrt{[n]_q!}$ und $(e_n(f))_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$e_n(f) := \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}} f^{\otimes n}$$

bildet ein Orthonormalsystem in $\mathcal{F}_q(H)$, also eine Orthonormalbasis des Unterhilbertraums $\mathcal{F}_q(\mathbb{C}f)$ von $\mathcal{F}_q(H)$. Bezüglich dieser Orthonormalbasis gilt

$$X(f)e_n(f) = \sqrt{[n+1]_q}\, e_{n+1}(f) + \sqrt{[n]_q}\, e_{n-1}(f) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}^+$ ist $z - X(f)$ invertierbar und es gilt $(z - X(f))^{-1}\Omega \in \mathcal{F}_q(\mathbb{C}f)$, d.h. es gibt eine Folge $(\gamma_n(z))_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ mit

$$(z - X(f))^{-1}\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(z) e_n(f).$$

(c) Die hierdurch bestimmten Funktionen $z \mapsto \gamma_n(z)$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind auf $\mathbb{C}^+$ holomorph, nehmen nur Werte in $\mathbb{C}^-$ an und sind damit insbesondere nullstellenfrei. Durch

$$\alpha_n(z) := \sqrt{[n+1]_q}\, \frac{\gamma_n(z)}{\gamma_{n+1}(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}^+$$

werden holomorphe Funktionen $\alpha_n : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ definiert, die der Rekursion

$$\alpha_{n-1}(z) = z - \frac{[n+1]_q}{\alpha_n(z)} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

genügen, und es gilt

$$G_{X(f)}(z) = \langle \Omega, (z - X(f))^{-1}\Omega \rangle_q = \frac{1}{z - \frac{1}{\alpha_0(z)}}.$$

bitte wenden

Aufgabe 2. In Aufgabe 1 haben wir die Kettenbruchentwicklung der Cauchy-Transformierten $G_{X(f)}$ von $X(f)$ bestimmt, nämlich

$$G_{X(f)}(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{[1]_q}{z - \cfrac{[2]_q}{z - \cfrac{[3]_q}{\ddots}}}}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir nun $X_n(f) := P_n X(f) P_n$, wobei wir mit P_n die orthogonale Projektion von $\mathcal{F}_q(H)$ auf $\operatorname{span}\{e_0(f), e_1(f), \dots, e_n(f)\}$ bezeichnen. Zeigen Sie:

(a) Die an der n-ten Stelle abgebrochene Kettenbruchentwicklung von $G_{X(f)}$ liefert die Cauchy-Transformierte von $X_n(f)$, d.h.

$$G_{X_n(f)}(z) = \cfrac{1}{z - \cfrac{[1]_q}{z - \cfrac{[2]_q}{\cfrac{\ddots}{z - \cfrac{}{z - \cfrac{[n]_q}{z}}}}}}.$$

(b) Für $k = 0, \dots, n-1$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mu_{X_n(f)}(x) = \int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mu_{X(f)}(x).$$

Wir fassen zusammen: Nach (b) konvergiert $X_n(f)$ in Verteilung gegen $X(f)$, was aus allgemeinen Gründen äquivalent dazu ist, dass $G_{X_n(f)}$ auf $\mathbb{C}^+$ kompakt gegen $G_{X(f)}$ konvergiert. Teil (a) erklärt dann, dass die Kettenbruchentwicklung von $G_{X(f)}$ (als Folge von abgebrochenen Kettenbrüchen) kompakt konvergent ist.
Da die Verteilung von $X_n(f)$ diskret ist, erlauben die obigen Ergebnisse darüber hinaus, auf explizite Weise die Verteilung von $X(f)$ beliebig genau durch diskrete Verteilungen zu approximieren.