UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Zufallsmatrizen und freie Entropie
Wintersemester 2013/2014

Blatt 11
Abgabe: Dienstag, 4.2. (!), in der Vorlesung

Auf diesem Aufgabenblatt betrachten wir die folgende Situation:

Es sei (M, τ) ein W^*-Wahrscheinlichkeitsraum mit Spur. Die von-Neumann-Algebra M werde dabei von selbstadjungierten Elementen $X_1, \dots, X_d$ erzeugt, wobei wir zusätzlich annehmen können, dass $\tau(X_j^2) \leq 1$ für $j = 1, \dots, d$ erfüllt ist.
Weiter sei $0 < \theta < \frac{1}{2}$ und $p \in M$ eine orthogonale Projektion mit $\theta < \tau(p) < 1 - \theta$ und

$$\|[p, X_j]\|_2 < \omega \qquad \text{für } j = 1, \dots, d$$

für ein $\omega > 0$.

Aufgabe 1. Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathbb{C}\langle Z_1, \dots, Z_d\rangle$ die Algebra der Polynome in den (formalen) nicht-kommutierenden Variablen $Z_1, \dots, Z_d$. Diese wird zu einer $*$-Algebra, indem wir sie mit der durch

$$(Z_{i(1)} Z_{i(2)} \dots Z_{i(k)})^* := Z_{i(k)} \dots Z_{i(2)} Z_{i(1)} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N},\ 1 \leq i(1), \dots, i(k) \leq d$$

bestimmten Involution $*$ versehen. (Dies müssen Sie nicht beweisen!) Zeigen Sie:

(a) Für alle $\delta > 0$ gibt es ein Polynom $P \in \mathbb{C}\langle Z_1, \dots, Z_d\rangle$ mit der Eigenschaft $P = P^*$, so dass gilt
$$\|p - P(X_1, \dots, X_d)\| < \delta. \tag{1}$$

(b) Erfüllt $P = P^* \in \mathbb{C}\langle Z_1, \dots, Z_d\rangle$ Bedingung (1) für ein $\delta > 0$, so gilt
$$\|[P(X_1, \dots, X_d), X_j]\|_2 < 2\delta + \omega \qquad \text{für } j = 1, \dots, d. \tag{2}$$

(c) Ist $P = P^* \in \mathbb{C}\langle Z_1, \dots, Z_d\rangle$ gegeben, dann gibt es für alle $\delta > 0$ ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $r_0 > 0$, so dass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $r > r_0$ und $(A_1, \dots, A_d) \in \Gamma(X_1, \dots, X_d; N, r, \varepsilon)$ bei beliebigem $N \in \mathbb{N}$ gilt
$$\big| \|[P(X_1, \dots, X_d), X_j]\|_2 - \|[P(A_1, \dots, A_d), A_j]\|_2 \big| < \delta. \tag{3}$$
Beachten Sie, dass hierbei $\| \cdot \|_2$ je nach Kontext die entsprechende Norm auf M oder auf $\mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ bezeichnet.

bitte wenden

Aufgabe 2. Beweisen Sie die folgenden Hilfsaussage, die wir im Beweis von Lemma 15.4 der Vorlesung verwendet haben:

Lemma. *Es gibt* $r_0 > 0$ *und* $\varepsilon_0 > 0$, *so dass für alle* $r > r_0$ *und* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *ein* $N_0 = N_0(r, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ *existiert mit der folgenden Eigenschaft:*
Für alle $N \geq N_0$ *gibt es zu* $(A_1, \ldots, A_d) \in \Gamma(X_1, \ldots, X_d; N, r, \varepsilon)$ *eine Projektion* $Q \in \mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ *mit* $\mathrm{Tr}(Q) = \lfloor N\tau(p) \rfloor$ *und*

$$\|[Q, A_j]\|_2 < 2\omega \qquad \text{für } j = 1, \ldots, d.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 1 und überlegen Sie sich, wie eine selbstadjungierte Matrix aus $\mathrm{M}_N(\mathbb{C})$, die in gewisser Weise "nahe" bei einer Projektion liegt, "sinnvoll" zu einer solchen deformiert werden kann.