UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai
M.Sc. Carlos Vargas

Zufallsmatrizen und freie Entropie

Grundwissen über Cauchy- und Hilbert-Transformierten

1 Cauchy-Transformierte

1.1 Definition und erste Eigenschaften

Im Folgenden bezeichne $\mathbb{C}^\pm$ die obere bzw. untere komplexe Halbebene, d.h.

$$\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} |\ \operatorname{Im}(z) > 0\} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} |\ \operatorname{Im}(z) < 0\}.$$

Wir beginnen mit der einfachen Beobachtung, dass $|z-t| \geq \operatorname{Im}(z-t) = \operatorname{Im}(z)$ und damit $\frac{1}{|z-t|} \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}^+$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt. Demnach ist die stetige Funktion $t \mapsto \frac{1}{z-t}$ für festes $z \in \mathbb{C}^+$ beschränkt und somit bezüglich jedes endlichen Borel-Maßes auf $\mathbb{R}$ integrierbar.
Ist nun μ speziell ein (Borel-)Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$, so erhalten wir durch

$$G_\mu(z) := \int_\mathbb{R} \frac{1}{z-t}\, d\mu(t) \tag{1}$$

eine wohldefinierte Funktion $G_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$, die sogenannte *Cauchy-Transformierte von* μ. Diese Funktion taucht auch oft unter dem Namen *Stieltjes-Transformierte* auf, unterscheidet sich dann aber meist durch einen zusätzlichen Vorfaktor -1 von der Cauchy-Transformierten.
Man beachte, dass durch (1) auch eine Funktion $G_\mu : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ definiert werden kann. Wegen $G_\mu(\overline{z}) = \overline{G_\mu(z)}$ enthält diese aber keine zusätzliche Information, weshalb wir die Cauchy-Transformierte üblicherweise nur auf $\mathbb{C}^+$ betrachten.
Um das Abbildungsverhalten von Cauchy-Transformierten genauer zu verstehen, rechnen wir weiter nach, dass für alle $z \in \mathbb{C}^+$

$$\operatorname{Im}(G_\mu(z)) = \int_\mathbb{R} \operatorname{Im}\Big(\frac{1}{z-t}\Big)\, d\mu(t) = \int_\mathbb{R} \operatorname{Im}\Big(\frac{\overline{z}-t}{|z-t|^2}\Big)\, d\mu(t) = -\operatorname{Im}(z) \int_\mathbb{R} \frac{1}{|z-t|^2}\, d\mu(t)$$

gilt, was insbesondere zeigt, dass die Cauchy-Transformierte von μ genauer eine Abbildung $G_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^-$ darstellt.
Wenden wir uns nun der Frage nach der Holomorphie von G_μ zu. Ist $z_0 \in \mathbb{C}^+$ gegeben, so liegt die Kreisscheibe $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| < r\}$ für alle $0 < r < \operatorname{Im}(z_0)$ ganz in $\mathbb{C}^+$ und wir erhalten die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{(z-z_0)+(z_0-t)} = \frac{1}{z_0-t} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-z_0}{z_0-t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z_0-t)^{k+1}}(z-z_0)^k$$

für beliebiges aber festes $z \in D_r(z_0)$ mit normaler Konvergenz bezüglich $t \in \mathbb{R}$. Wir erhalten damit für G_μ auf $D_r(z_0)$ die folgende Potenzreihenentwicklung

$$G_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{(-1)^k}{(z_0-t)^{k+1}}\, d\mu(t) \Big) (z-z_0)^k.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass diese sogar normal konvergent ist. Die Cauchy-Tranformierte stellt damit eine auf $\mathbb{C}^+$ holomorphe Funktion dar.

Wir halten unsere ersten Beobachtungen fest:

Satz 1. *Zu jedem Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{R}$ ist durch* (1) *eine wohldefinierte und holomorphe Funktion $G_\mu : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^-$ gegeben. Diese erfüllt $|G_\mu(z)| \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}^+$ und hat die Ableitungen*

$$G_\mu^{(k)}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(-1)^k k!}{(z-t)^{k+1}}\, d\mu(t).$$

1.2 Charakterisierung von Cauchy-Transformierten

Der folgende Satz stellt nun einerseits nützliche Eigenschaften von Cauchy-Transformierten zusammen, gibt aber andererseits auch eine Charakterisierung dieser wichtigen Funktionenklasse. Für $\alpha > 0$ setzen wir dabei

$$\Gamma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} |\ \operatorname{Im}(z) > 0,\ |\operatorname{Re}(z)| < \alpha \operatorname{Im}(z)\}.$$

Satz 2. *Sei $G : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^-$ eine holomorphe Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(i) Die Funktion G ist die Cauchy-Transformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathbb{R}$, d.h. es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{R}$, so dass $G_\mu = G$.

(ii) Für alle $\alpha > 0$ gilt $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty,\ z\in\Gamma_\alpha} zG(z) = 1.$

(iii) Es gilt $\displaystyle\lim_{y\to\infty} iyG(iy) = 1.$

1.3 Stieltjes-Inversionsformel

Mit der Cauchy-Transformierten haben wir einen Weg gefunden, zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß ein handliches analytisches Objekt zu assoziieren. Damit dieser Übergang auch wirklich sinnvoll ist, sollten dabei möglichst alle Informationen über das ursprüngliche Maß erhalten bleiben, d.h. es sollte prinzipiell möglich sein, dieses aus der Cauchy-Transformierten zurückzugewinnen. Genau dies beschreibt nun der folgende Satz:

Satz 3 (Stieltjes-Inversionsformel)**.** *Sei G_μ die Cauchy-Transformierte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf $\mathbb{R}$. Für alle $\varepsilon > 0$ liefert dann*

$$d\mu_\varepsilon(t) := -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}(G_\mu(t+i\varepsilon))\,dt$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$. Für $\varepsilon \searrow 0$ konvergiert μ_ε schwach gegen μ, d.h. es gilt

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(t)\,d\mu_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,d\mu(t)$$

für alle stetigen und beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

1.4 Folgen von Cauchy-Transformierten

Wir tragen nun einige Aussagen über Folgen von Cauchy-Transformierten zusammen: Als Konsequenz aus den in Satz 1 formulierten Eigenschaften haben wir, dass

$$\mathcal{G} := \{G_\mu |\ \mu \text{ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \mathbb{R}\}$$

lokal-beschränkt ist und damit nach dem Satz von Montel eine normale Famile in $\mathcal{O}(\mathbb{C}^+)$ darstellt. Ferner ist nach dem Satz von Vitali eine Folge von Cauchy-Transformierten schon dann kompakt konvergent, wenn sie punktweise auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}^+$ konvergiert, die einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}^+$ besitzt.
Mit Satz 2 folgern wir weiter, dass die Grenzfunktion G einer kompakt konvergenten Folgen $(G_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von Cauchy-Transformierten selbst eine Cauchy-Transformierte sein muss, sobald die Bedingung $\lim_{y\to\infty} iyG(iy) = 1$ erfüllt ist. Auf der Ebene der Wahrscheinlichkeitsmaße entspricht dies dann der schwachen Konvergenz, d.h. für $G = G_\mu$ haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\,d\mu_n(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,d\mu(t)$$

für alle stetigen und beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

1.5 Cauchy-Transformierte von Maßen mit kompaktem Träger

Kommen wir nun zu dem wichtigen Spezialfall eines Wahrscheinlichkeitsmaßes mit kompaktem Träger. Für ein solches Maß μ finden wir klarerweise ein $R > 0$, so dass der Träger im Intervall $[-R, R]$ enthalten ist. Dann definiert (1) sogar eine holomorphe Funktion auf $\Delta_R := \{z \in \mathbb{C} | \ |z| > R\}$, besitzt also eine Laurententwicklung um ∞. Um diese nun konkret zu bestimmen, nutzen wir aus, dass für festes $z \in \Delta_R$ die Reihenentwicklung $\frac{1}{z-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{z^{n+1}}$ normal in $t \in [-R, R]$ konvergiert, so dass wir

$$G_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(\mu)}{z^{n+1}} \qquad \text{mit} \qquad m_n(\mu) := \int_{\mathbb{R}} t^n \, d\mu(t)$$

folgern können. Die Koeffizienten in der Laurentreihenentwicklung von G_μ um ∞ sind also gerade die *Momente* $m_n(\mu)$ *von* μ.

2 Hilbert-Transformierte

In diesem Abschnitt wollen wir die Hilbert-Transformierte zu Funktionen aus $L^p(\mathbb{R})$ für $1 < p < \infty$ einführen und einige ihrer Eigenschaften zusammenstellen.

2.1 Die harmonisch konjugierte Funktion

Im Umgang mit Hilbert-Transformierten erweist es sich als sehr hilfreich, die zu transformierenden Funktionen in geeigneter Weise von $\mathbb{R}$ in die obere Halbebene $\mathbb{C}^+$ fortzusetzen: Sei hierzu $u \in L^p(\mathbb{R})$ für $1 < p < \infty$ gegeben. Wir betrachten dann die Funktion $U : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$U(z) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(t)}{(x-t)^2 + y^2} \, dt, \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}^+.$$

Diese ist auf $\mathbb{C}^+$ harmonisch und hat ferner die Eigenschaft, dass $U(t + i\varepsilon) \to u(t)$ für $\varepsilon \searrow 0$ für Lebesgue-fast-alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.
Man definiert weiter die *zu* U *harmonisch konjugierte Funktion* $\tilde{U} : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\tilde{U}(z) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t) u(t)}{(x-t)^2 + y^2} \, dt, \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}^+.$$

Diese ist gerade so konstruiert, dass $U + i\tilde{U}$ auf $\mathbb{C}^+$ holomorph ist. In der Tat können wir durch direktes Nachrechnen überprüfen, dass

$$U(z) + i\tilde{U}(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{z - t} \, dt, \qquad z \in \mathbb{C}^+, \tag{2}$$

denn es gilt

$$\frac{i}{z-t} = \frac{i}{(x-t)+iy} = \frac{i(x-t)+y}{(x-t)^2+y^2} = \frac{y}{(x-t)^2+y^2} + i\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}.$$

Man kann nun zeigen, dass es eine Funktion $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R})$ gibt, so dass $\tilde{U}(t+i\varepsilon) \to \tilde{u}(t)$ für $\varepsilon \searrow 0$ für Lebesgue-fast-alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, und dass diese Funktion durch den Ausdruck

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{\pi}\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{t-s}\, ds = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Big[\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{u(s)}{t-s}\, ds + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{u(s)}{t-s}\, ds \Big]$$

gegeben ist. Die so konstruierte Funktion $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R})$ nennen wir die *Hilbert-Transformierte von* u und schreiben $Hu = \tilde{u}$. Wir halten noch fest, dass sich dies umschreiben lässt zu

$$(Hu)(t) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{u(t+s)-u(t-s)}{s}\, ds.$$

2.2 Die Hilbert-Transformation als Operator $H : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$

Die Hilbert-Transformation liefert definitionsgemäß eine Abbildung $H : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$. Man kann zeigen, dass diese die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) H ist ein stetiger linearer Operator. Genauer gilt für alle $u \in L^p(\mathbb{R})$

$$\|Hu\|_p \leq c_p \|u\|_p \qquad \text{mit} \qquad c_p = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi}{2p}\right), & \text{für } 1 < p \leq 2 \\ \cot\left(\frac{\pi}{2p}\right), & \text{für } 2 < p < \infty \end{cases}.$$

(ii) Der Operator H ist invertierbar und es gilt $H^{-1} = -H$ bzw. $H^2 = -\,\mathrm{id}$.

(iii) Sind $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} (Hu)(x)v(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} u(x)(Hv)(x)\, dx.$$

2.3 Zusammenhang mit dem Hardy-Raum über $\mathbb{C}^+$

Nach einem Satz von Riesz existiert zu $1 < p < \infty$ eine Konstante $K_p > 0$, so dass

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{U}(x+iy)|^p\, dx \leq K_p \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^p\, dt$$

für alle $u \in L^p(\mathbb{R})$ gilt. Wenden wir dies sowohl auf u als auch auf Hu an, so können wir für die auf $\mathbb{C}^+$ holomorphe Funktion $F := U + i\tilde{U}$ folgern, dass gilt

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p\, dx < \infty.$$

Zudem sehen wir, dass mit $f := u + i\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R})$ auch $F(x+iy) \to f(x)$ für $y \searrow 0$ für Lebesgue-fast-alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.
Bemerkenswerterweise lässt sich zu dieser Aussage auch die Umkehrung beweisen: Ist $F : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ holomorph mit der Eigenschaft

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p \, dx < \infty$$

(mit anderen Worten, F gehört zum *Hardy-Raum* $H^p(\mathbb{C}^+)$), so gibt es eine Funktion $f \in L^p(\mathbb{R})$, so dass $F(x+iy) \to f(x)$ für $y \searrow 0$ und Lebesgue-fast-alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und $-\operatorname{Im}(f)$ ist die Hilbert-Transformierte von $\operatorname{Re}(f)$.
Indem wir diese Aussage auf $-iF$ statt F anwenden, sehen wir, dass zudem $\operatorname{Re}(f)$ die Hilbert-Transformierte von $\operatorname{Im}(f)$ darstellt. Dies entspricht der Identität $H^2 = -\operatorname{id}$.

Beispiel 4. Man kann zeigen, dass für die Cauchy-Transformierte G_μ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ mit kompaktem Träger und einer Dichte p, die durch $M > 0$ nach oben beschränkt ist,

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |G_\mu(x+iy)|^2 \, dx < 2\pi^2 M$$

gilt. Beachten wir, dass gemäß (2)

$$\frac{1}{\pi} G_\mu(z) = \tilde{U}(z) - iU(z), \qquad z \in \mathbb{C}^+$$

gilt, so können wir folgern, dass

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{-1}{\pi} \operatorname{Im}(G_\mu(x+iy)) = \lim_{y \searrow 0} U(x+iy) = u(x)$$

bzw.

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}(G_\mu(x+iy)) = \lim_{y \searrow 0} \tilde{U}(x+iy) = \tilde{u}(x).$$

Nach der Stieltjes-Inversionsformel haben wir also $u = p$ Lebesgue-fast-überall sowie

$$\lim_{y \searrow 0} \operatorname{Re}(G_\mu(x+iy)) = \pi(Hp)(x) \qquad \text{für Lebesgue-fast-alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 5. Man beachte, dass sich unsere Definition der Hilbert-Transformierten um einen Faktor $\frac{1}{\pi}$ von der der Vorlesung unterscheidet. Dies hat sich bei vielen der vorgestellten Resultate auch als zweckmäßig herausgestellt.
Das vorangegangene Beispiel macht allerdings deutlich, dass gerade im Zusammenhang mit der Cauchy-Transformierten die Normierung der Vorlesung günstiger ist. Definieren wir nämlich die Hilbert-Transformierte als

$$(Hu)(t) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s)}{t-s} \, ds,$$

so haben wir

$$\lim_{y \searrow 0} \operatorname{Re}(G_\mu(x+iy)) = (Hp)(x) \qquad \text{für Lebesgue-fast-alle } x \in \mathbb{R}.$$

3 Ein Beispiel: Die Halbkreisverteilung

Wir betrachten die Halbkreisverteilung μ, also das Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{R}$, das gegeben ist durch

$$d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-t^2}\, 1_{[-2,2]}(t)\, dt.$$

Wir wollen zunächst die zugehörige Cauchy-Transformierte bestimmen. Definitionsgemäß gilt

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t}\, d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-t^2}}{z-t}\, dt,$$

so dass wir mit der Substitution $t = 2\cos(\theta)$ unmittelbar

$$G_\mu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{2\sin^2(\theta)}{z-2\cos(\theta)}\, d\theta$$

erhalten. Beachten wir nun, dass die Substitution $\theta \mapsto 2\pi - \theta$ das obige Integral in das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \frac{2\sin^2(\theta)}{z-2\cos(\theta)}\, d\theta$$

überführt, so können wir für die Cauchy-Transformierte auch

$$G_\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2\sin^2(\theta)}{z-2\cos(\theta)}\, d\theta$$

schreiben. Nutzen wir schließlich aus, dass mit $\zeta = e^{i\theta}$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(\zeta - \zeta^{-1}) = \frac{1}{2i}\zeta^{-1}(\zeta^2-1) \qquad \text{und} \qquad \cos(\theta) = \frac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1}) = \frac{1}{2}\zeta^{-1}(\zeta^2+1)$$

und damit insbesondere

$$\sin^2(\theta) = -\frac{1}{4}\zeta^{-2}(\zeta^2-1)^2$$

gilt, so können wir (mit $d\zeta = i\zeta d\theta$) das letzte Integral auch als komplexes Wegintegral über den Rand der Einheitskreisscheibe schreiben:

$$G_\mu(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta^2-1)^2}{\zeta^2(\zeta^2 - z\zeta + 1)}\, d\zeta.$$

Dieses Integral wollen wir nun mit Hilfe des Residuensatzes bestimmen. Für festes $z \in \mathbb{C}^+$ betrachten wir dazu die durch

$$g_z(w) := \frac{(w^2-1)^2}{w^2(w^2 - zw + 1)}$$

definierte Funktion g_z, die auf $\mathbb{C}$ meromorph ist mit einem Pol zweiter Ordnung in 0 und zwei Polen erster Ordnung in w_1 und w_2, wobei w_1, w_2 die beiden Lösungen der Gleichung $w^2 - zw + 1 = 0$ sind. Für das vorliegende Integral sind dabei nur die Pole im Innern der Einheitskreisscheibe von Interesse. Wenden wir uns deshalb zunächst den beiden Polstellen w_1 und w_2 zu: Für jedes $w \in \mathbb{C}$, das die Gleichung $w^2 - zw + 1 = 0$ löst, gilt klarerweise $w \neq 0$ und damit auch $w + \frac{1}{w} = z$, so dass wir $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)\big(1 - \frac{1}{|w|^2}\big)$ folgern können. Beachten wir weiter, dass mit w auch $\frac{1}{w}$ eine Lösung der untersuchten Gleichung ist, so schließen wir, dass diese genau

- eine Lösung w_1 mit $\operatorname{Im}(w_1) < 0$ und $|w_1| < 1$ und
- eine Lösung w_2 mit $\operatorname{Im}(w_2) > 0$ und $|w_2| > 1$

haben muss. Wir bestimmen nun die Residuen an der Polstelle w_1

$$\operatorname{Res}(g_z; w_1) = \lim_{w \to w_1} (w - w_1) g_z(w) = \frac{(w_1^2 - 1)^2}{w_1^2 (w_1 - w_2)} = w_1 - \frac{1}{w_1}$$

sowie an der doppelten Polstelle 0

$$\operatorname{Res}(g_z; 0) = \lim_{w \to 0} \frac{d}{dw}\big(w^2 g_z(w)\big) = \lim_{w \to 0} \frac{d}{dw}\Big(\frac{(w^2-1)^2}{w^2 - zw + 1}\Big) = z = w_1 + \frac{1}{w_1}$$

und erhalten gemäß dem Residuensatz $G_\mu(z) = w_1$. Dies bedeutet nun, dass $G_\mu(z)$ für $z \in \mathbb{C}^+$ die eindeutige Lösung der Gleichung $w^2 - zw + 1 = 0$ mit $\operatorname{Im}(w) < 0$ ist, weshalb insbesondere

$$G_\mu(z)^2 + 1 = zG_\mu(z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^+$$

gilt. Wir merken an dieser Stelle noch an, dass die obige Gleichung auch leicht aus der Tatsache gefolgert werden kann, dass μ die Momente

$$m_n(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 2m+1 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \\ C_m, & \text{falls } n = 2m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad C_m := \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$$

besitzt und dass die hierbei auftretenden *Catalanzahlen* C_m die Rekursion

$$C_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} C_k C_{m-k} \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0$$

erfüllen. Wollen wir G_μ nun explizit darstellen, so müssen wir die obige Gleichung unter Beachtung der Nebenbedingung $\operatorname{Im}(G_\mu(z)) < 0$ für alle $z \in \mathbb{C}^+$ lösen. Wir erhalten

$$G_\mu(z) = \frac{1}{2}\big(z - \sqrt{z^2 - 4}\big),$$

wobei wir auf $\mathbb{C}^+$ einen geeigneten Zweig der Wurzel $z \mapsto \sqrt{z^2-4}$ wählen müssen. Diesen beschafft man sich leicht über die Zerlegung $\sqrt{z^2-4} = \sqrt{z-2}\sqrt{z+2}$ und die Wahl des Hauptzweiges des Logarithmus zur Bestimmung von $\sqrt{z \pm 2} = \exp(\frac{1}{2}\log(z \pm 2))$.
Um aus der Cauchy-Transformierten von μ die Hilbert-Transformierte der Dichte p von μ bestimmen zu können, ist etwas Vorarbeit nötig: Sei $z \in \mathbb{C}^+$ gegeben. Wir finden dann zwei Winkel $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$ mit $z + 2 = |z+2|e^{i\theta_1}$ und $z - 2 = |z-2|e^{i\theta_2}$. Es gilt damit

$$G_\mu(z) = \frac{1}{2}\Big(2 + |z-2|e^{i\theta_2} - \sqrt{|z^2-4|}e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\Big)$$

und insbesondere

$$\mathrm{Re}(G_\mu(z)) = \frac{1}{2}\Big(2 + |z-2|\cos(\theta_2) - \sqrt{|z^2-4|}\cos\Big(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\Big)\Big).$$

Ist $x \in (-2, 2)$ gegeben und betrachten wir den Fall $z \to x$, so haben wir $\theta_1 \to 0$ und $\theta_2 \to \pi$ und deshalb $\mathrm{Re}(G_\mu(z)) \to \frac{x}{2}$. Analog erhalten wir

$$\mathrm{Re}(G_\mu(z)) \to \frac{1}{2}\big(x - \sqrt{x^2-4}\big) \qquad \text{für } z \to x \text{ mit } x > 2,$$
$$\mathrm{Re}(G_\mu(z)) \to \frac{1}{2}\big(x + \sqrt{x^2-4}\big) \qquad \text{für } z \to x \text{ mit } x < -2.$$

Die Hilbert-Transformierte der Dichte p von μ (vgl. Bemerkung 5) ist demnach gegeben durch

$$(Hp)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(x + \sqrt{x^2-4}\big), & x < -2 \\ \frac{x}{2}, & -2 < x < 2 \\ \frac{1}{2}\big(x - \sqrt{x^2-4}\big), & x > 2 \end{cases}.$$

Zum Vergleich ist nachfolgend die Funktion $x \mapsto \mathrm{Re}(G_\mu(x+iy))$ für $y = 0.01$ dargestellt: