UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 2
Abgabe: Mittwoch, 6.5.2015, 8:30 Uhr
in den Briefkästen neben dem Zeichensaal, Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_n(x) = x^n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

(b) $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1, 2, \ldots, n^2 - 1\}$, definiert durch $f(x) = x^2 - 1$

(c) $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n - 1\}$, definiert durch $f(x) = x - 1$

Aufgabe 2 ($10 + 5^*$ Punkte)**.** Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

(d) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(e) Ist f bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ bijektiv.

(f*) Für welche der Aussagen (a) bis (e) gilt Äquivalenz? Jeweils Beweis oder Gegenbeispiel.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Welche der folgenden Aussagen folgen hieraus (Beweis oder Gegenbeispiel):

(a) f ist injektiv

(b) f ist surjektiv

(c) g ist injektiv

(d) g ist surjektiv

bitte wenden

Aufgabe 4 (10+5* Punkte)**.** Beweisen Sie:

(a) Sind $M_1, \ldots, M_l$ abzählbare Mengen, so ist auch

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_l = \{(m_1, m_2, \ldots, m_l) \mid m_i \in M_i \text{ für } 1 \leq i \leq l\}$$

abzählbar. (Tipp: Beweisen Sie die Aussage zunächst für den Fall $l = 2$.)

(b) Ist Y endlich und ist $f : X \to Y$ injektiv, so ist auch X endlich.

(c) Ist X endlich und ist $f : X \to Y$ surjektiv, so ist auch Y endlich.

(d*) Gelten (b) und (c) auch, wenn man jeweils "endlich" durch "abzählbar" ersetzt?

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Zeigen Sie:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Gilt $|M| = n$, so gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

(b) Sei M abzählbar. Dann gibt es keine Surjektion der Menge M auf ihre Potenzmenge.

Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein: Die Potenzmenge einer Menge ist immer echt mächtiger als die Menge selbst.