UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 3
Abgabe: Mittwoch, 13.5.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Zeigen Sie:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $|M| = n$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$. Zeigen Sie, dass es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene Teilmengen von M mit genau k Elementen gibt.

Folgern Sie unter Benutzung von Blatt 2, Aufgabe 5, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ ist.

(b) Sei M abzählbar. Dann gibt es keine Surjektion der Menge M auf ihre Potenzmenge.

Dieser Zusammenhang gilt übrigens ganz allgemein: Die Potenzmenge einer Menge ist immer echt mächtiger als die Menge selbst.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Welche der folgenden Mengen sind abzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$

(b) die Menge aller 2×2-Matrizen mit rationalen Matrixelementen

(c) die Menge aller Abbildungen $f : \{0, 1\} \to \mathbb{N}$

(d) die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** (a) Suchen Sie sich drei Aussagen von Bemerkung 2.4(d) aus und beweisen Sie diese.

(b) Suchen Sie sich drei Aussagen von Bemerkung 2.8 aus (außer (b), (d) und (i)) und beweisen Sie diese.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K$.

(a) Beweisen Sie die inverse Dreiecksungleichung:

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$$

(b) Seien $a > 0$ und $b > 0$. Zeigen Sie folgende Ungleichung:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a = 0$.

(b) Gilt die Aussage in (a) auch noch, wenn $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ nicht für alle, aber für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt?

Zusatzaufgabe* (10* Punkte)**.** Sei $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen, so wie wir sie aus der Schule kennen: Die Menge aller möglicherweise nicht abbrechenden Dezimalzahlen (bspws. $5{,}48563967\ldots$). Zeigen Sie, dass das Intervall $[0,1] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ überabzählbar ist. Benutzen Sie dazu ein Diagonalfolgenargument wie in Satz 1.14.
Folgern Sie, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.