UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 4
Abgabe: Mittwoch, 20.5.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (**20** Punkte!)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden Folgen konvergieren, und bestimmen Sie deren Grenzwerte für $n \to \infty$.

(a) $a_n = \frac{2n^2}{n^2+3n+2}$

(b) $b_n = \frac{5\cdot 8^n - 3\cdot 8^{2n}}{2\cdot 8^{n-1}+2\cdot 8^{2n-1}}$

(c) $c_n = \frac{n^{38}+40n^7+n^2+17}{((n+2)^2+1)^{19}}$

(d) $d_n = (-1)^n \frac{n+4}{3n^2-1}$

(e) $e_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n$ (Sie dürfen benutzen, dass $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ für $0 \leq x \leq y$ gilt)

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Die Fibonacci-Zahlen f_n, $n \geq 0$ sind definiert durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Ferner sei g der goldene Schnitt, dh. g ist die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $g^2 = 1 + g$.

(a) Zeigen Sie: $g = 1 + \frac{1}{g}$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie mittels Induktion nach n: $|a_n - g| = \frac{1}{f_n g^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

Aufgabe 3 (**20** Punkte!)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und sei $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ eine Folge aufsteigender natürlicher Zahlen. Die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ heißt dann *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Zeigen Sie, dass dann auch die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, mit demselben Grenzwert. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(b) Von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bekannt, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Konvergiert dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst? (Beweis oder Gegenbeispiel)