UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 5
Abgabe: Mittwoch, 27.5.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ und sei $k \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge

$$b_n := \frac{1}{k}(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k})$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie: Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt entweder eine konvergente Teilfolge oder eine, die bestimmt gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$ divergiert.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Von einem Liter Wein gießt man $1/4$ Liter weg und ersetzt den weggegossenen Teil durch Wasser. Von der Mischung gießt man wiederum $1/4$ Liter weg und ersetzt den weggegossenen Teil durch Wein. Dieser aus zwei Schritten bestehende Prozess wird beliebig oft wiederholt. Welches Mischungsverhältnis ergibt sich im Grenzwert? Existiert der Grenzwert überhaupt? Ersetzen Sie nun $1/4$ durch ein q mit $0 < q < 1$. Wie ist der Sachverhalt hier?

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass mit einem festen $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ für alle $n \geq 2$ gilt:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$$

(a) Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist

(b) Kann man auch aus $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ folgern, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist? (Beweis oder Gegenbeispiel)

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte). Für positive Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man durch

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}$$

das *arithmetische*, das *geometrische* bzw. das *harmonische Mittel*. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$ gilt. Seien nun $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 < a < b$. Wir definieren $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 := a$, $b_1 := b$ sowie $a_{n+1} := H(a_n, b_n)$ und $b_{n+1} := A(a_n, b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Alle Zahlen a_n, b_n sind rational.

(b) Ist $I_n = [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so bildet $(I_n)_n$ eine Intervallschachtelung, dh. für alle n ist $I_n \supset I_{n+1}$ und $|I_n| \to 0$ für $n \to \infty$.

(c) Für den Schnitt über alle Intervalle I_n gilt: $\cap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\sqrt{ab}\}$

(d) Finden Sie mit Hilfe der obigen Konstruktion eine rationale Zahl x mit $|\sqrt{2} - x| < 10^{-3}$.

Die *Zwischenklausur* findet am Freitag, dem 19.6. von 8:30 bis 10:00 (also zur Vorlesungszeit) in HS I statt.

Das griechische Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ϵ, ε	Epsilon	P	ρ, ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ, ϑ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ, φ	Phi
K	κ	Kappa	χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega