UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 6
Abgabe: Mittwoch, 3.6.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie (unter Benutzung von Satz 5.10 bzw. 5.12) die Korollare 5.11 sowie 5.13 der Vorlesung. Sei dazu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so dass $\alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, falls $\alpha < 1$ ist, und dass sie divergiert, falls $\alpha > 1$ ist.

(b) Finden Sie sowohl ein Beispiel einer kovergenten Reihe mit $\alpha = 1$ als auch eines einer divergenten Reihe mit $\alpha = 1$.

(c) Bearbeiten Sie (a) und (b) für den Fall, dass α durch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ gegeben ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Welche der nachstehenden (bei $n = 1$ beginnenden) Folgen sind monoton, welche sind streng monoton? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

$$a_n = n^2 + (-1)^n \qquad b_n = n^4 - 2n^3 \qquad c_n = n^{1-n} \qquad d_n = n + \sqrt{a + \frac{1}{n^2}},\ a > 0$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz (beweisen Sie Ihre Aussagen):

(a) $a_n = \frac{1}{n^k}$ für $k \in \mathbb{N}$ fest

(b) $a_n = (-1)^n(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$

(c) $a_n = \frac{n^{1000}}{(1+\epsilon)^n}$ mit $\epsilon > 0$ fest

(d) $a_n = \frac{z^n}{n}$ mit $z \in \mathbb{R}$ fest

Welche der Reihen sind absolut konvergent?

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Eine (unsterbliche) punktförmige Schnecke kriecht auf einem zunächst 1 km langen Gummiseil jede Nacht um 1 cm auf einen unter einer Schneckophobie leidenden, ebenfalls unsterblichen Mathematiker zu, der das Seilende hält und das Seil am folgenden Tag um einen Kilometer dehnt.
Vorausgesetzt, das Seil lässt sich beliebig oft um 1 km dehnen – erreicht dann die Schnecke je den Mathematiker?

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei S der Wert der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}S$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}S$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{2}S$

Zusatzaufgabe* (10* Punkte)**.** Sei $W \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Folge $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. Finden Sie eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = W$ gilt.