UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 7
Abgabe: Mittwoch, 10.6.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wir haben in Proposition 6.4 gesehen, dass für eine absolut summierbare Familie $(a_i)_{i\in I}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{i_n}|$ in jeder Abzählung $i_1, i_2, \dots$ von I konvergiert. Ist der Wert eigentlich eindeutig?

(a) Sei $(a_i)_{i\in I}$ absolut summierbar mit abzählbarer und unendlicher Indexmenge I. Seien $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to I$ zwei Bijektionen. Gilt dann $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\varphi(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{\psi(n)}|$?

(b) Zeigen Sie, dass der Wert einer summierbaren Famile eindeutig ist. (Definition 6.5 bzw. Bemerkung 6.6)

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Seien nun $x \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $|x| \leq \frac{N+2}{2}$. Zeigen Sie:

$$\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

(*Hinweis:* Überlegen Sie sich, dass $\frac{|x|^k}{(N+2)\ldots(N+k)} \leq \left(\frac{|x|}{N+2}\right)^k$ gilt.)

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Die Zahl $e \in \mathbb{R}$ sei als $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ definiert. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert und dass er die Zahl e ist.
(Hinweis: Zeigen Sie $(1 + \frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ und $e^{\frac{1}{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$ unter Benutzung von $e^{\frac{1}{n+1}} = \exp(\frac{1}{n+1})$. Überlegen Sie sich, dass die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsend und beschränkt ist. Benutzen Sie den binomischen Lehrsatz und die Bernoullische Ungleichung.)

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Finden Sie eine Familie $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, so dass

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right) \neq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right),$$

wo aber beide Doppelsummen konvergieren. Ist$(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ summierbar?

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass folgende Familien summierbar sind und berechnen Sie deren Summe. (Hierbei ist $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.)

(a) $a_{ij} = \dfrac{1}{2^i 3^j}$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$

(b) $a_{ij} = \dfrac{1}{i! 3^j}$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$

(c) $a_{ik} = \dbinom{k}{i} x^i y^{k-i}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq i \leq k$ wobei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x|, |y| < \dfrac{1}{2}$

(*Hinweis:* Zeigen Sie Eigenschaft 6.4(ii) für Mengen $G = \{0, \ldots, N\} \times \{0, \ldots, M\}$. Warum genügt das?)

Zusatzaufgabe* (10* Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := f(n)$. Geben Sie auch den größten Häufungspunkt (also $\limsup_{n\to\infty} a_n$) sowie den kleinsten (also $\liminf_{n\to\infty} a_n$) an.