UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 8
Abgabe: Mittwoch, 17.6.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Familie $(a_{kj})_{j,k=2,3,4,\ldots}$, gegeben durch $a_{kj} = \frac{1}{j^k}$, summierbar ist und berechnen Sie den Wert der Doppelreihe:

$$\sum_{j,k=2}^{\infty} \frac{1}{j^k}$$

(Hinweis: Benutzen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$)

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Wir setzen $\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ und $\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$

(b) $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$

(c) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(d) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Limes superior und den Limes inferior.

(a) $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $a_n := (-1)^n \sqrt[n]{n}$

(c) $a_n := \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Dann gilt auch $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x_0) > 0$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit $a < x_0 < b$, so dass $f(x) > 0$ für alle x im Intervall (a, b).

Zusatzaufgabe* (**20*** Punkte)**.** Sei $E(\mathbb{N}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge der *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie dass eine Abzählung $E_1, E_2, \ldots$ von $E(\mathbb{N})$ existiert.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Familie $(a_i)_{i \in E_n}$ mit $a_i := 2^{-i}$ summierbar ist.

(c) Sei $s_n := \sum_{i \in E_n} 2^{-i}$. Berechnen Sie den Limes superior und den Limes inferior der Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.