



Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 9

Abgabe: Mittwoch, 24.6.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (20 Punkte). Wir betrachten die Funktion $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Zeigen Sie:

- (a) f ist nicht beschränkt und nimmt weder ihr Infimum noch ihr Supremum an (vgl. Satz 9.5 und Bemerkung 9.6). Was sind Infimum und Supremum von f ?
- (b) f ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
- (c) f ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig fortsetzbar, dh. es gibt keine stetige Funktion $g : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $g(x) = \frac{1}{x}$ für $0 < x < 1$.

Aufgabe 2 (20 Punkte). Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L \geq 0$ existiert mit $|f(z) - f(w)| \leq L|z - w|$ für alle $z, w \in D$. Zeigen Sie:

- (a) Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
- (b) Ist $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ stetig? Gleichmäßig stetig? Lipschitz-stetig?
- (c) Ist $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig? Lipschitz-stetig?
(*Hinweis:* Nach Korollar 10.3 ist g stetig.)

Aufgabe 3 (10 Punkte). Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ besitzt einen Fixpunkt $x \in [a, b]$. (dh. $f(x) = x$). (*Hinweis:* Wählen Sie eine geeignete Hilfsfunktion und benutzen Sie den Zwischenwertsatz)