UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 10
Abgabe: Mittwoch, 1.7.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Der *Cosinus-Hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der *Sinus-Hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ werden definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie:

(a) $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig und für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten $\cosh(-x) = \cosh(x)$ und $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

(b) Beweisen Sie die Additionstheoreme für sinh und cosh (für $x, y \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1. \end{aligned}$$

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Der Sinus-Hyperbolicus und der Cosinus-Hyperbolicus sind übrigens sehr "realitätsnahe" Funktionen. Die Gestalt eines an zwei Enden aufgehängten Seiles wird nämlich nicht, wie vielfach irrtümlich angenommen, von einer quadratischen Funktion beschrieben, sondern vom Cosinus-Hyperbolicus. Sein Graph wird daher auch "Kettenlinie" genannt.

bitte wenden

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Bringen Sie die unten aufgeführten Ausdrücke auf die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $(2 + i) \cdot (3 + i)$

(b) $\frac{1}{i}$

(c) $\frac{3+i}{4-i}$

(d) $\frac{(2+5i)(3-7i)}{1+3i}$

(Hinweis: binomische Formel)

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeichnen Sie die folgenden Punktmengen.

(a) $M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - i| = |z + i| \right\}$

(b) $M_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < |z - 1| < 2 \right\}$

(c) $M_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \leq 1, \mathrm{Re}(z) \geq 0, |\mathrm{Im}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie die vier vierten Wurzeln von -4 in $\mathbb{C}$, d.h. alle vier Lösungen der Gleichung $z^4 = -4$ für $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Lösen Sie (ggf. erneut) Aufgabe 4 der Zwischenklausur:

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = c$. Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{c}{a}$ konvergiert, falls $a \neq 0$ ist.

Geben Sie auch ein Beispiel einer Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie einer divergenten Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \neq 0$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine injektive, stetige Funktion mit $f(0) = 0$. Wir definieren die n-fache Komposition $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g_n := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n-\text{fach}}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie per vollständiger Induktion:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

(i) g_n stetig,

(ii) g_n injektiv,

(iii) $g_n(0) = 0$,

(iv) und also $\lim_{k\to\infty} g_n(a_k) = g_n(a)$ und $g_n(a) \neq 0$.