UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 11
Abgabe: Mittwoch, 8.7.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie Proposition 12.5(b). Wir betrachten dazu $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x)$ für $|x| \leq 2n+3$. Zeigen Sie, dass $|r_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ gilt. Überlegen Sie sich dazu, dass die Folge $a_k := \frac{x^{2k}}{(2n+3)(2n+4)\dots(2n+2k+2)}$ monoton fallend ist, mit $a_1 < 1$.

Aufgabe 2 (**20** Punkte)**.** Beweisen Sie Prop. 12.10(a-c). Zeigen Sie also:

(a) Auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist cos streng monoton fallend mit Bildbereich $[0,1]$, sin ist streng monoton wachsend mit Bildbereich $[0,1]$, und $x \mapsto \exp(ix)$ durchläuft genau das Segment des Einheitskreises im 1. Quadranten.

(b) Untersuchen Sie auch die Situation auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ und $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. (*Tipp:* 12.9(c))

(c) Zeigen Sie, dass es stetige Umkehrfunktionen $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ von cos sowie $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ von sin gibt.

(d) Skizzieren Sie sin und cos auf $[0, 2\pi]$.

(e) Wir definieren die *Tangensfunktion* $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ durch $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zeigen Sie $\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ und $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$ sowie dass $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bijektiv ist. Somit gibt es eine Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, der *Arcustangens*.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Skizzieren Sie das Bild der Geraden $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$ unter der Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. (Begründen Sie Ihre Skizze)

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Polarzerlegung von $\alpha = 8i$ und berechnen Sie alle dritten Wurzeln z_0, z_1, z_2 von α, dh. alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = \alpha$. Fertigen Sie drei Skizzen in der Zahlenebene an, in die Sie jeweils z_i, z_i^2 und z_i^3 eintragen.