UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 12
Abgabe: Mittwoch, 15.7.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie für die Ableitungen des Tangens und des Arcustangens (Blatt 11):

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x), \qquad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $y \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie für die Ableitungen von Sinus-Hyperbolicus und Cosinus-Hyperbolicus (Blatt 10):

$$\sinh'(x) = \cosh(x), \qquad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \exp(\sin(x)\cos(x))$

(b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}; f(x) = x^x$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \cos(\exp(x^2)) \ln(x^2 + 1)$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \dfrac{\cos(x)}{e^x(x^2+1)}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in D n-mal stetig differenzierbare Funktionen. Man beweise durch vollständige Induktion nach n die folgende Beziehung (nach Leibniz):

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}(x)$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Untersuchen Sie direkt, also mit Hilfe des Grenzwerts der Differenzenquotienten, die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ auf Differenzierbarbeit, und berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ in allen Punkten $x \in [0, \infty)$ in denen Differenzierbarkeit vorliegt.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist:

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$