UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Sommersemester 2015

Blatt 13
Abgabe: Mittwoch, 22.7.2015, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

(b) Zeigen Sie, dass f nicht stetig differenzierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass f unendlich viele lokale Minima und Maxima besitzt (benutzen Sie den Tangens).

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Seien $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie dabei alle Rechenschritte (insbesondere: Überprüfen Sie alle Voraussetzungen Ihres Lieblingssatzes für diese Aufgabe):

(a) $$\lim_{x\to a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

Aufgabe 3 (10 + 5* Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine überall differenzierbare Funktion mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f'(x_0) = 0$.

(b)* Existiert zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = a$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Gleichung $Ce^x = 28 + x^4$ für jedes $C > 0$ genau eine Lösung besitzt.
(*Hinweis:* Untersuchen Sie den Quotienten von $28 + x^4$ und Ce^x auf Monotonie.)

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei eine Zahl $U \in \mathbb{R}$ mit $U > 0$ gegeben. Welche Gestalt muss ein Rechteck mit Umfang U besitzen, um eine maximale Fläche des Rechtecks zu erlangen?

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist, mit $f(0) = 0$ und monoton wachsender Ableitung f'. Zeigen Sie, dass die auf $(0, \infty)$ definierte Funktion $\frac{f(x)}{x}$ monoton wachsend ist.