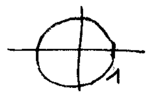
§ 12 Die trigonometrischen Funktionen

12.1 Lemma: Sei $x \in \mathbb{R}$.



(a) $e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$

(b) Für $z := e^{ix}$ ist $z \in \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\} = \{w \in \mathbb{C} \mid w\bar{w} = 1\}$ Einheitskreis

(c) $\mathrm{Re}(e^{ix}e^{iy}) = \mathrm{Re}(e^{ix})\,\mathrm{Re}(e^{iy}) - \mathrm{Im}(e^{ix})\,\mathrm{Im}(e^{iy})$

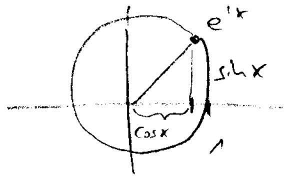
bzw. allgemein $\mathrm{Re}\big((a+ib)(c+id)\big) = ac - bd$

Beweis: (a) $\overline{e^{ix}} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}} \overset{11.13(d)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{ix})^n}{n!} = e^{\overline{ix}} = e^{-ix}$

(b) $e^{ix}\,\overline{e^{ix}} \overset{(a)}{=} e^{ix}e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1$

(c) $\mathrm{Re}\big((a+ib)(c+id)\big) = \mathrm{Re}\big((ac-bd) + i(bc+ad)\big) = ac - bd$ $\square$

12.2 Definition: Für $x \in \mathbb{R}$ definiere



$\cos(x) := \mathrm{Re}(e^{ix})$ „Cosinus"

$\sin(x) := \mathrm{Im}(e^{ix})$ „Sinus"

12.3 Proposition: (a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

(b) $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig

(c) $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$,

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Beweis: (a) nach Definition 12.2

(b) $\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Re}} \mathbb{R}$ Verkettung stetiger Funktionen (11.16(c),(d))

$x \mapsto ix \mapsto \exp(ix) \mapsto \mathrm{Re}\, e^{ix}$

(c) $\cos(-x) = \mathrm{Re}(e^{-ix}) = \mathrm{Re}(\overline{e^{ix}}) = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \cos(x)$

$\sin(-x) = \mathrm{Im}(e^{-ix}) = \mathrm{Im}(\overline{e^{ix}}) = -\mathrm{Im}(e^{ix}) = -\sin(x)$

$\cos(x+y) = \mathrm{Re}(e^{i(x+y)}) = \mathrm{Re}(e^{ix}e^{iy}) \overset{12.1(c)}{=} \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

etc. $\square$

12.4 Lemma: $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$

Beweis: $\cos(x+y) - \cos(x-y)$

$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) - \big(\cos x \underbrace{\cos(-y)}_{\cos y} - \sin x \underbrace{\sin(-y)}_{-\sin y}\big)$

$= -2 \sin x \sin y$ $\square$

12.5 Proposition: Für $x \in \mathbb{R}$ habe folgende Reihendarstellung von sin und cos.

(a) $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(b) $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x)$ mit $|r_{2n+2}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ falls $|x| \le 2n+3$

$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2n+3}(x)$ mit $|r_{2n+3}(x)| \le \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$ falls $|x| \le 2n+4$

Abschätzung der Restglieder

Beweis: (a) $e^{ix} = \underbrace{1}_{Re} + \underbrace{ix}_{Im} \underbrace{- \frac{x^2}{2}}_{Re} \underbrace{- \frac{ix^3}{3!}}_{Im} + \underbrace{\frac{x^4}{4!}}_{Re} + \underbrace{i\frac{x^5}{5!}}_{Im} \underbrace{- \frac{x^6}{6!}}_{Re} \underbrace{- i\frac{x^7}{7!}}_{Im} + \dots$

(b) $r_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} + (-1)^{n+2} \frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!} + \dots$

$= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \underbrace{\left(1 + (-1)\frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} + \dots\right)}_{0 \le \dots \le 1}$

$\Rightarrow |r_{2n+2}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ ← Blatt 11. □

12.6 Lemma: (a) $\cos(2) \le -\frac{1}{3}$ und $\sin(x) > 0$ für $x \in (0,2]$

(b) cos ist auf $[0,2]$ streng monoton fallend

(c) cos hat im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle.

Beweis: (a) $\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + r_4(x) = -1 + r_4(x)$, $|r_4(x)| \le \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}$

$\overset{12.4}{\Longrightarrow} \cos(2) = -1 + r_4(x) \le -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

$\sin(x) = x + r_3(x)$ mit $|r_3(x)| \le \frac{|x|^3}{3!} = \frac{|x|^3}{6}$ für $|x| \le 4$ (also insbes. für $x \in (0,2]$)

Ist $x \le 2$, so gilt sogar $\frac{|x|^3}{6} \le \frac{4}{6}|x| < |x|$

Also $\sin x = x + r_3(x) > x - x = 0$.

(b) $0 \le x < y \le 2$. Dann $\cos(y) - \cos(x) \overset{\uparrow}{=} -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \overset{(a)}{<} 0$

(12.4, $a := \frac{x+y}{2}$, $b := \frac{y-x}{2}$, $a+b = y$, $a-b = x$)

$\Rightarrow \cos(y) < \cos(x)$.

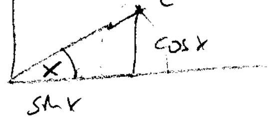
(c) $\cos(0) = 1$, $\cos(2) \le -\frac{1}{3} < 0 \overset{ZWS}{\Longrightarrow}$ cos hat auf $[0,2]$ eine Nullstelle

Da cos streng monoton ist auf $[0,2]$, ist cos insbes. injektiv.

Also ist die Nullstelle eindeutig. □

12.7 Definition: Die Nullstelle von cos auf $[0,2)$ wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet. (Definition von Pi)

12.8 Bemerkung: Diese Definition von pi ist besser als geometrische Definitionen (Flächeninhalt des Einheitskreises etc), da sie präziser zu formulieren ist: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für $z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ (kann Realteil) Schalten von e^{ix}, $x \in \mathbb{R}$
Mit Monotonie und ZWS $\Rightarrow$ Nullstelle von cos eindeutig.
Genauso ist die Definition von sin und cos über die Geometrie durchaus vage:

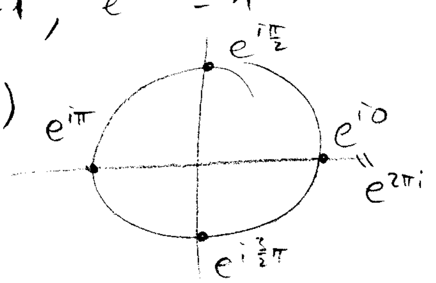


Benötige dafür gute Winkeldef. etc.

12.9 Proposition: Eigenschaften von π, sin, cos und exp.

(a) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

(b) $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$



(c) $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}$ (insbesondere ist exp auf $\mathbb{C}$ nicht injektiv!)

$\cos(x+2\pi) = \cos x$, $\cos(x+\pi) = -\cos x$
$\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\sin(x+\pi) = -\sin x$
$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$

(d) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, d.h. die Länge von e^z hängt nur vom Realteil ab

Beweis: (a) $1 = |e^{i\frac{\pi}{2}}| = \sqrt{\underbrace{\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{2}})}_{=\cos(\frac{\pi}{2})=0}^2 + \mathrm{Im}(e^{i\frac{\pi}{2}})^2} = \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2})^2}$

$\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}) \in \{-1, 1\} \overset{12.6(a)}{\Longrightarrow} \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

(b) $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$, $e^{i\frac{\pi}{2}k} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^k = i^k$ für $k \in \mathbb{N}$.

(c) $e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}e^{2\pi i} = e^{ix} \Rightarrow \cos(x+2\pi) = \cos x$, $\sin(x+2\pi) = \sin x$
$e^{i(x+\frac{\pi}{2})} = ie^{ix} \Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \mathrm{Re}(ie^{ix}) = \mathrm{Re}(i(\cos x + i\sin x)) = -\sin x$

(d) $|e^z| = |e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}| = |e^{\mathrm{Re}(z)}| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ $\square$

12.10 Proposition:

(a) Auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ durchläuft cos streng monoton fallend das Intervall $[0,1]$.
(d.h. $\cos(0)=1$, $\cos(\frac{\pi}{2})=0$)

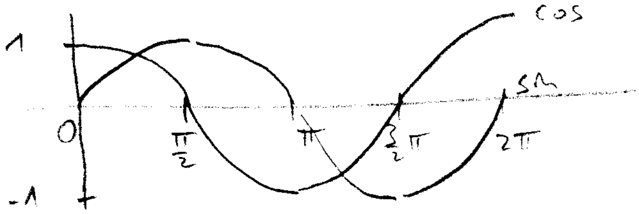
Auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ durchläuft sin streng monoton wachsend das Intervall $[0,1]$.

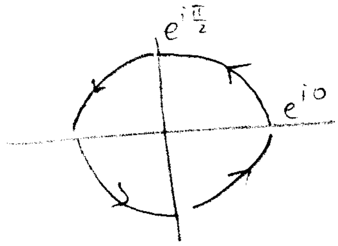
Auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ durchläuft $x\mapsto\exp(ix)$ das Segment des Einheitskreises im 1. Quadranten.

(b) Auf $[\frac{\pi}{2},\pi]$ durchläuft cos streng monoton fallend das Intervall $[-1,0]$.

Auf $[\frac{\pi}{2},\pi]$ durchläuft sin streng monoton fallend das Intervall $[0,1]$.

Auf $[\frac{\pi}{2},\pi]$ durchläuft $x\mapsto\exp(ix)$ das Segment des Einh.kr. im 2. Quadr.





(c) Es gibt eine stetige Umkehrfunktion $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$
mit $\arccos(\cos x)=x$, $\cos(\arccos y)=y$

Es gibt eine stetige Umkehrfunktion $\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
mit $\arcsin(\sin x)=x$, $\sin(\arcsin y)=y$

(d) Die Abbildung $x\mapsto e^{ix}$ bildet das Intervall $[0,2\pi)$ bijektiv und stetig auf den Einheitskreis $\{w\in\mathbb{C}\mid |w|=1\}$.

Somit existiert eine Umkehrfunktion $\arg:\{w\in\mathbb{C}\mid |w|=1\}\to[0,2\pi)$.

Diese Funktion ist jedoch unstetig in 1.

Beweis. (a) bis (c) Blatt 11.

(d) Funktion ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

Nach (a) und (b) ex. zu jedem $w\in\mathbb{C}$, $|w|=1$, $\operatorname{Im}(w)\geq 0$ ein $x\in[0,\pi]$ mit $e^{ix}=w$. Für $w\in\mathbb{C}$, $|w|=1$, $\operatorname{Im}(w)\leq 0$ ex. $y\in[0,\pi]$ mit $e^{iy}=\overline{w}$. Setze $x:=2\pi-y$.

Dann $e^{ix}=e^{2\pi i}e^{-iy}=\overline{e^{iy}}=w$. Also $x\mapsto e^{ix}$ surjektiv.

Da cos auf $[0,\frac{\pi}{2}],[\frac{\pi}{2},\pi],[\pi,\frac{3}{2}\pi],[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$ jeweils str. monoton (benutze 12.9(c)), ist $x\mapsto e^{ix}$ bereits jeweils injektiv
($e^{ix}=e^{iy}\Rightarrow\operatorname{Re}(e^{ix})=\operatorname{Re}(e^{iy})$).

arg ist unstetig in 1: Betrachte $z_n = e^{i\frac{1}{n}}$, $w_n = e^{2\pi i(1-\frac{1}{n})}$.
Dann $|z_n| = |w_n| = 1 \ \forall n$, $z_n \to 1$, $w_n \to 1$, aber $\arg z_n = \frac{1}{n} \to 0$, $\arg w_n = 2\pi(1-\frac{1}{n}) \to 2\pi$.

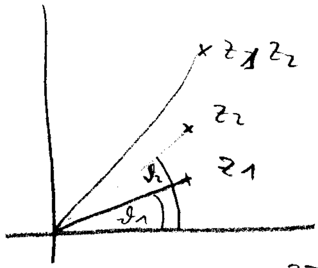
□

12.11 Satz (Polarzerlegung): Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form $z = re^{i\vartheta}$ mit $r > 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

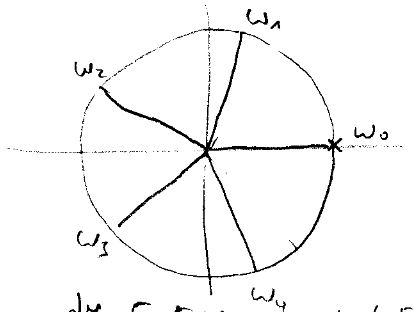
Beweis: Setze $r := |z| \neq 0$, $w := \frac{z}{r}$. Dann $z = rw$ und $|w| = \frac{|z|}{|r|} = 1$. Nach 12.10(d) ex. also genau ein $\vartheta \in [0, 2\pi)$ mit $e^{i\vartheta} = w$. ($\vartheta = \arg w$)

□

12.12 Korollar: Sind $z_1 = r_1 e^{i\vartheta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\vartheta_2}$, so ist das Produkt $z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$ gegeben durch Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel.



12.13 Korollar: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt genau n verschiedene Einheitswurzeln, d.h. die Gleichung $\omega^n = 1$ hat n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$. Sie sind gegeben durch $\omega_k = e^{2\pi i(\frac{k}{n})}$, $k = 0, \dots, n-1$. Allgemein hat $z^n = \alpha$ für $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ die Lösungen $z_k = \alpha_0 \omega_k$, $k = 0, \dots, n-1$, wobei $\alpha_0 = \sqrt[n]{|\alpha|}\, e^{2\pi i \frac{\vartheta}{n}}$ für $\alpha = |\alpha| e^{2\pi i \vartheta}$.



die 5 Einheitswurzeln ($\omega^5 = 1$)

Beweis: $\omega_k^n = e^{2\pi i \frac{k}{n} \cdot n} = 1$, also Lösung.
Ist umgekehrt $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = 1$, so ist $|w|^n = 1 \Rightarrow |w| = 1 \Rightarrow w = e^{i\vartheta}$ für ein $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Da $e^{i\vartheta n} = w^n = 1$, ist $\vartheta n = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$.
(Wähle $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $\vartheta n - 2\pi k \in [0, 2\pi)$. Nach 12.10(d) ist dann $\vartheta n - 2\pi k = 0$, da $e^{i(\vartheta n - 2\pi k)} = 1$, nach 12.9(c) und $x \mapsto e^{ix}$ inj. auf $[0, 2\pi)$)
Also $\vartheta = 2\pi \frac{k}{n}$ und $w = e^{i\vartheta} = e^{2\pi i \frac{k}{n}} = \omega_k$.
Allgemein $(\alpha_0 \omega_k)^n = \alpha$ und $z^n = \alpha$ impliziert $\left(\frac{z}{\alpha_0}\right)^n = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow \frac{z}{\alpha_0} = \omega_k$ für ein k.

□

12.14 Beispiel (ÜbH 10, A4): $z^4 = -4$? Lösungen nach 12.13:
$-4 = 4 \cdot e^{2\pi i \cdot \frac{1}{2}}$, $\alpha_0 = \sqrt{2}\, e^{\pi i \cdot \frac{1}{4}}$, $z_0 = \sqrt{2}\, e^{\pi i \cdot \frac{1}{4}} = 1 + i$, $z_1 = \dots$