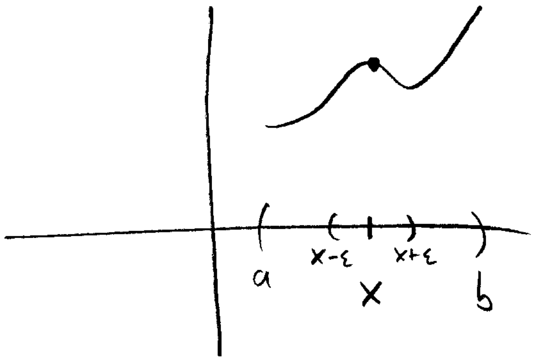
§ 14 Lokale Extrema und der Mittelwertsatz

14.1 <u>Definition</u>: Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.



Dann hat f in $x\in(a,b)$ ein „<u>lokales Maximum</u> [bzw. <u>Minimum</u>]"
falls es ein $\varepsilon>0$ existiert,
so dass $\forall\, y\in(a,b)$ mit $|x-y|<\varepsilon$
gilt: $f(x)\geq f(y)$ [bzw. $f(x)\leq f(y)$].
Wir sagen f hat in $x\in(a,b)$ ein <u>globales Maximum</u> [bzw. <u>Minimum</u>],
falls $f(x)\geq f(y)\ \ \forall y\in(a,b)$ [bzw. $f(x)\leq f(y)\ \ \forall y\in(a,b)$].

14.2 <u>Satz</u>: Ist $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ diffbar und besitzt in x ein lokales Maximum oder Minimum, so ist $f'(x)=0$.

<u>Beweis</u>: Wir beweisen nur den Fall des Maximums (Min analog).

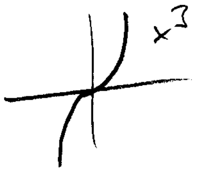
Da f diffbar ist in x, ex. $f'(x)=\lim\limits_{\substack{\xi\to x\\ \xi\neq x}}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$.

Für $\xi_n\to x,\ \xi_n<x$ ist dann $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overbrace{f(\xi_n)-f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{\xi_n-x}_{<0}}\geq 0$

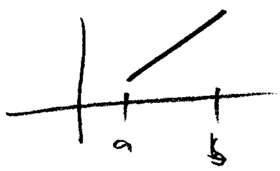
Für $\xi_n\to x,\ \xi_n>x$ ist dann $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overbrace{f(\xi_n)-f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{\xi_n-x}_{>0}}\leq 0$

$\Rightarrow f'(x)=0.$ $\square$

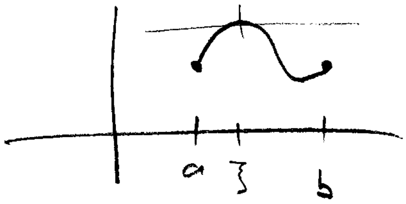
14.3 <u>Bemerkung</u>: a) Dies ist eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^3$ hat in $x=0$ kein lok. Extremum, aber $f'(0)=0$



b) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und liegt das lokale Extremum am Rand, so gilt nicht notwendigerweise $f'(x)=0$. Bsp.:



14.4 <u>Satz von Rolle</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig ($a<b$), $f(a)=f(b)$ und sei f diffbar auf (a,b). Dann gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=0$.



<u>Beweis</u>: 1. Fall: Ist f konstant, so ist $f'\equiv 0$, also trivial.

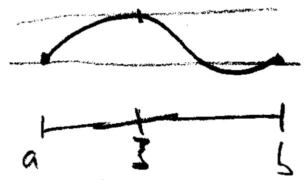
2. Fall: Gibt es ein $y\in(a,b)$ mit $f(y)>f(a)$ oder $f(y)<f(a)$, so nimmt f das Minimum und Maximum auf $[a,b]$ an (9.5) und mindestens eines davon liegt in (a,b) ($\exists\, p,q\in[a,b]$ mit $f(p)\geq f(y)>f(a)$ oder $f(q)\leq f(y)<f(a)$)

$\Rightarrow p\in(a,b)$ oder $q\in(a,b)$

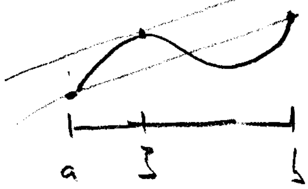
$\overset{14.2}{\Longrightarrow} f'(p)=0$ mit $p\in(a,b)$ oder $f'(q)=0$ mit $q\in(a,b)$. □

14.5 <u>Mittelwertsatz</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig ($a<b$) und sei f diffbar auf (a,b). Dann gibt es ein $\xi\in(a,b)$ mit $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>Beweis</u>:



Rolle



MWS = „gekippter Satz von Rolle"

Betrachte $g(x):=f(x)-m(x-a)$ mit $m:=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dann ist g stetig auf $[a,b]$, diffbar auf (a,b) und $g(a)=f(a)=g(b)\overset{14.4}{\Longrightarrow}\exists\,\xi\in(a,b): \underbrace{g'(\xi)}_{=f'(x)-m}=0$

□

14.6 <u>Bemerkung</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Wo können globale Extrema von f liegen?

(i) auf dem Rand

(ii) an Stellen in (a,b), an denen f diffbar mit $f'(x)=0$ ist

(iii) an Stellen, an denen f nicht diffbar ist.

Bsp: 

14.7 <u>Satz (Monotoniekriterium)</u>: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf (a,b).

(a) Ist $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$, so ist f streng monoton wachsend auf $[a,b]$.

(b) Ist $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$, ... streng monoton fallend ... .

(c) Ist $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$, ... monoton wachsend ...

(d) Ist $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$, ... monoton fallend ...

<u>Beweis:</u> (a) Seien $x < y$ in (a,b). Nach dem MWS (14.5) ex. $\xi \in (x,y)$ mit $\frac{f(y)-f(x)}{\underbrace{y-x}_{>0}} = f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(y) - f(x) > 0$.

(b), (c) & (d) analog. $\square$

14.8 <u>Korollar:</u> Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, diffbar auf (a,b).

(a) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ monoton wachsend

(b) $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ monoton fallend

(c) $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ streng monoton wachsend

$\quad f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$ $\swarrow$

(d) $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ streng monoton fallend

$\quad f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$ $\swarrow$

<u>Beweis:</u> (a) „$\Leftarrow$" $x < y \Rightarrow \frac{\overbrace{f(y)-f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{y-x}_{>0}} \geq 0 \Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$.

(c) $f'(x) > 0 \ \forall x \overset{14.7}{\Rightarrow} f$ str. mon. wachs. $\overset{(a)}{\Rightarrow} f'(x) \geq 0 \ \forall x$

aber $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^3$ ist str. mon. wachsend mit $f'(0) = 0$.

$\square$

14.9 Beispiel: $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$. Welches Monotonieverhalten?

$$f(x) = \exp\left(\tfrac{1}{x}\ln x\right) \Rightarrow f'(x) = \underbrace{\exp\left(\tfrac{1}{x}\ln x\right)}_{>0\ \forall x} \underbrace{\tfrac{1}{x^2}}_{>0\ \forall x} \underbrace{(1-\ln x)}_{?}$$

$\ln' x = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \ln$ str. mon. wachsend. $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$.

$$\Rightarrow 1-\ln x \begin{cases} >0 & x<e \\ =0 & x=e \\ <0 & x>e \end{cases} \Rightarrow f'(x) \begin{cases} >0 & x<e \\ =0 & x=e \\ <0 & x>e \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \begin{cases} \text{str. mon. wachs. für } x<e \\ \text{str. mon. fallend für } x>e \end{cases}$$

Insbesondere ist $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ mon. fallend ab $n \geq 3 > e$.

Asymptotik von f: Da $\sqrt[n]{n} \to 1$, ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

14.10 Satz: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar, $x \in (a,b)$

(a) Ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$, so hat f in x ein lokales Max.

(b) Ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so hat f in x ein lokales Min.

(c) Ist $f'(x) = f''(x) = 0$, so ist keine Aussage möglich.

Beweis: (a) Da f'' stetig ist, ex. $\varepsilon > 0$, so dass $f''(y) < 0 \ \forall y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$.

$\overset{14.7(b)}{\Longrightarrow} f'$ streng monoton fallend auf $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Außerdem $f'(x) = 0$.

$\Rightarrow f' > 0$ auf $(x-\varepsilon, x)$ und $f' < 0$ auf $(x, x+\varepsilon)$.

$\overset{14.7}{\Longrightarrow} f$ str. mon. wachs. auf $(x-\varepsilon, x)$ und str. mon. fall. auf $(x, x+\varepsilon)$.

$\Rightarrow f$ hat in x ein lokales Max.

(b) analog

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ erfüllt $f'(0) = f''(0) = 0$, aber in 0 kein lok. Extr.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$ erfüllt $f'(0) = f''(0) = 0$ und in 0 lok. Minimum.

$\square$

14.11 Beispiel: Wo ist $f: [0,5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^{-x}$ global extremal?

Überprüfe gemäß 14.6 (i) den Rand: $f(0) = 0$, $f(5) = 5e^{-5}$.

(ii) f auf $(0,5)$ diffbar (also (iii) hinfällig).

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$. $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Also nach 14.7 ist $x=1$ einziger verbleibender Kandidat für ein lokales Extremum. $f(1) = e^{-1}$. Habe $f(0) < f(5) < f(1)$

$\Rightarrow f$ ist in 0 minimal (global) und in 1 maximal (global).

(Nach 14.10: $f''(x) = xe^{-x} - 2e^{-x}$, $f''(1) = -e^{-1} < 0 \Rightarrow$ lok. Max)

14.12 Proposition: Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar mit $f' \equiv 0$ auf (a,b). Dann ist f konstant.

Beweis: Seien $x, y \in (a,b)$, $x < y$ $\overset{\text{MWS 14.5}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (x,y): \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) = 0$

$\Rightarrow f(y) - f(x) = 0$ $\square$

14.13 Korollar: (a) Betrachte $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ce^{ax}$, $c, a \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $f'(x) = a f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Sei umgekehrt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffbar mit $f'(x) = a f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Dann ex. $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = ce^{ax}$.
(D.h. die Gleichung $f'(x) = a f(x)$ charakterisiert exp und wird (bis auf die Konstante) eindeutig von exp gelöst)

Beweis: (a) ✓

(b) $g(x) := f(x)e^{-ax}$. Dann $g'(x) \overset{\text{P.regel}}{=} f'(x)e^{-ax} - f(x)ae^{-ax} = 0$

$\overset{14.12}{\Longrightarrow} g$ konstant, d.h. $g(x) \equiv c$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\square$

14.14 Satz (Regeln von l'Hospital):

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar und $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

(a) $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = 0$, existiert $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(b) $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$, existiert $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(c) Die Aussagen in (a) und (b) gelten auch, wenn man „$\lim_{x \searrow a}$" jeweils durch „$\lim_{x \nearrow b}$", „$\lim_{x \to -\infty}$" oder „$\lim_{x \to \infty}$" ersetzt.

Beweis: (a) Setze f und g zu stetigen Funktionen auf $[a,b)$ fort per $f(a) := g(a) := 0$ (Stetig und $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} g(x) = f(a) = g(a)$)

Es gilt $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$. (Andernfalls nach Rolle: $g'(\xi) = 0$ für ein $\xi \in (a,x)$)

Sei $x \in (a,b)$. Setze $F_x(t) := f(t) - f(x) \frac{g(t)}{g(x)}$ für $t \in [a,b)$.

Dann ist $F_x : [a,x] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,x]$, diffbar auf (a,x) und $F_x(a) = F_x(x) = 0 \overset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists \xi_x \in (a,x)$ mit
$0 = F_x'(\xi_x) = f'(\xi_x) - \frac{f(x)}{g(x)} g'(\xi_x)$.

$\Rightarrow \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Ist nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \searrow a$, so ist auch $\xi_{x_n} \searrow a$, da $a < \xi_{x_n} < x_n$.

Also $\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_{x_n})}{g'(\xi_{x_n})} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(b), (c) ähnlich. $\square$

14.15 Beispiele:

(a) $\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{1 - e^{2x}} = ?$ $\quad f : (0,b) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$, $g : (0,b) \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 - e^{2x}$ diffbar,

$g'(x) = -2e^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in (0,b)$, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \sin 0 = 0$, $\lim_{x \searrow 0} g(x) = 0$,

$f'(x) = \cos x$, $\lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{-2e^{2x}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{1}{2}$.

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = ?$ für $\alpha > 0$ (siehe 10.6(h))

$\ln' x = \frac{1}{x}$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \neq 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$, $\lim_{x \to \infty} \ln x = \lim_{x \to \infty} x^\alpha = \infty$,

$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln' x}{(x^\alpha)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.