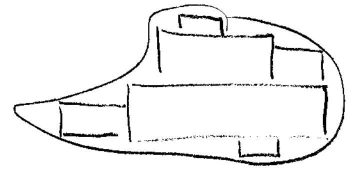
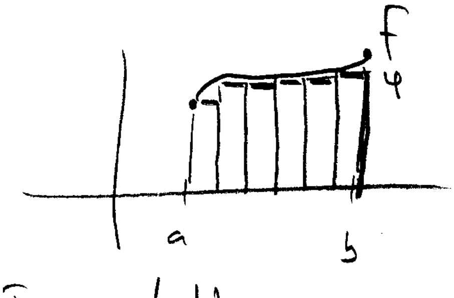
§15 Integration

Wie berechnet man die Fläche von:



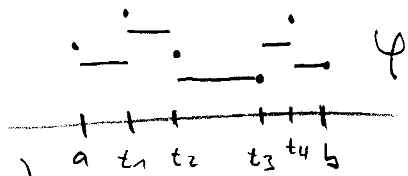
Idee: Approximiere durch einfachere Flächen (hier Rechtecke).

Diese Frage innerhalb der Analysis (als moderne Version der Geometrie): Berechne die Fläche unter dem Graphen einer Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ durch Approximation von f mittels einer Treppenfunktion.



15.1 <u>Definition</u>: Eine Funktion $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt <u>Treppenfunktion</u>, falls es eine Unterteilung $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ von $[a,b]$ gibt, so dass $\varphi|_{(t_{i-1},t_i)}$ konstant ist, für jedes $i=1,\ldots,n$.

Es gibt also $c_1,\ldots c_n\in\mathbb{R}$, so dass $\varphi(x)=c_i$ für $x\in(t_{i-1},t_i)$.



Setze $I(t_0,\ldots t_n;c_1,\ldots c_n):=\sum_{i=1}^n c_i(t_i-t_{i-1})$.

15.2 <u>Bemerkung</u>: (a) Die Werte von φ auf den Punkten t_i selbst sind nicht vorgeschrieben und werden nicht protokolliert.
Typischerweise ist φ hochgradig unstetig.
Mit charakteristischen Funktionen (siehe 8.3) kann man φ schreiben als $\varphi=\sum_{i=1}^n c_i\chi_{(t_{i-1},t_i)}+\sum_{i=0}^n a_i\chi_{\{t_i\}}$ für Zahlen $a_i\in\mathbb{R}$.

(b) Eine Unterteilung $a=t_0<\ldots<t_n=b$ ist feiner als eine andere $a=s_0<\ldots<s_m=b$, falls $\{t_0,\ldots t_n\}\subseteq\{s_0,\ldots s_m\}$.

15.3 Lemma: Sei $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bzgl. zwei verschiedenen Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $\varphi_{|(t_{i-1}, t_i)} \equiv c_i$ und $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b$, $\varphi_{|(s_{j-1}, s_j)} \equiv d_j$.

Dann gilt $I(t_0, \ldots t_n; c_1, \ldots c_n) = I(s_0, \ldots s_m; d_1, \ldots d_m)$.

Wir können also definieren: $\int_a^b \varphi(x)dx := I(t_0, \ldots t_n; c_1, \ldots c_n)$

Dieser Wert hängt also nicht von der Wahl der Unterteilung ab.

Schreibe auch $\int \varphi$ statt $\int_a^b \varphi(x)dx$.

Beweis: 1.) Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < \tilde{t} < t_k < \ldots < t_n = b$ eine feinere Unterteilung von $[a,b]$, als die durch $(t_0, \ldots t_n)$ gegebene (unterteile (t_{k-1}, t_k) in $(t_{k-1}, \tilde{t})$ und $(\tilde{t}, t_k)$).

Dann ist $\varphi_{|(t_{k-1}, \tilde{t})}(x) = \varphi_{|(\tilde{t}, t_k)}(x) = c_k$ und also

$$I(t_0, \ldots t_{k-1}, \tilde{t}, t_k, \ldots t_n; c_1, \ldots c_{k-1}, c_k, c_k, c_{k+1}, \ldots c_n)$$
$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} c_i (t_i - t_{i-1}) + \underbrace{c_k (t_k - \tilde{t}) + c_k (\tilde{t} - t_{k-1})}_{= c_k (t_k - t_{k-1})}$$
$$= I(t_0, \ldots t_{k-1}, t_k, \ldots t_n; c_1, \ldots c_{k-1}, c_k, c_{k+1}, \ldots c_n)$$

2.) Induktiv sieht man, dass sich $I(t_0, \ldots t_n, c_1, \ldots c_n)$ nicht ändert, wenn man die Unterteilung feiner macht.

3.) Sei $a = x_0 < \ldots < x_r = b$ die Unterteilung, die durch Vereinigung der Unterteilungen $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ und $a = s_0 < \ldots < s_m = b$ entsteht,

also:
$$\begin{array}{lllllllll}
a = t_0 & < & t_1 & < & t_2 & < & t_3 & < \ldots & < t_n = b \\
a = s_0 & < & s_1 \; \| & < & s_2 \; \| & < & \| \quad s_3 & < \ldots & < s_m = b \\
 & & \shortparallel & & \shortparallel & & \quad\;\; \shortparallel & & \\
a = x_0 & < & x_1 < x_2 & < & x_3 < x_4 & < & x_5 < x_6 & < \ldots & < x_r = b
\end{array}$$

Dann $I(t_0, \ldots t_n; c_1, \ldots c_n) \overset{2.)}{=} I(x_0, \ldots x_r; z_1, \ldots z_r) \overset{2.)}{=} I(s_0, \ldots s_m; d_1, \ldots d_m)$

wobei sich die Konstanten $z_1, \ldots z_r$ durch Auswertungen $\varphi(x)$, $x \in (x_{i-1}, x_i)$ mit $(x_{i-1}, x_i) \subseteq (t_{j-1}, t_j)$ oder $(x_{i-1}, x_i) \subseteq (s_{l-1}, s_l)$ für geeignetes j oder l ergeben. $\square$

15.4 Proposition: Seien φ, ψ Treppenfunktionen auf $[a,b]$. Dann gilt:

(a) Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha\varphi + \beta\psi$ eine Treppenfunktion und es gilt $\int(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\int\varphi + \beta\int\psi$ (d.h. $\int$ ist „linear")

(b) $|\varphi|$ ist ebenfalls eine Treppenfunktion und $|\int\varphi| \leq \int|\varphi|$

(c) gilt $\varphi \leq \psi$, so gilt $\int\varphi \leq \int\psi$
(d.h. $\varphi(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in [a,b]$)

Beweis: (a) Verfeinerte Unterteilungen von φ und ψ wie in 15.3
$\Rightarrow \alpha\varphi + \beta\psi$ Treppenfunktion.
Nach 15.3 können $\int\varphi$ und $\int\psi$ bzgl. dieser feineren Unterteilung ausgerechnet werden, also $\int\varphi$ und $\int\psi$ der Form $\sum_{i=1}^{\ell} a_i$ und $\sum_{i=1}^{\ell} b_i$. Dann $\alpha\int\varphi + \beta\int\psi = \alpha\sum a_i + \beta\sum b_i = \sum(\alpha a_i + \beta b_i)$
$= \int \alpha\varphi + \beta\psi$.

(b) $|\sum_{i=1}^{\ell} a_i| \leq \sum_{i=1}^{\ell} |a_i|$, Δ-Ungleichung

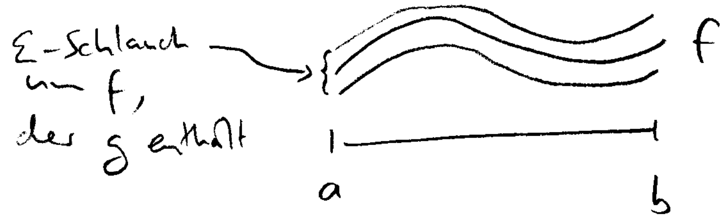
(c) $a_i \leq b_i$ $\forall i$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} a_i \leq \sum_{i=1}^{\ell} b_i$ $\square$

15.5 Definition: Sei X eine Menge und $f: X \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Setze $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$ „Supremumsnorm"

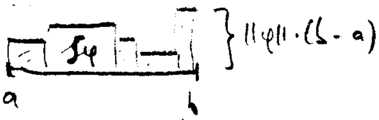
15.6 Bemerkung: Es gilt:

(a) $\|\cdot\|$ ist eine Norm, d.h. $\|f\| \geq 0$ $\forall f$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$, $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall f$, $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ $\forall f,g$

(b) $\|f-g\|$ bezeichnet den Abstand von f zu g. Ist $\|f-g\| < \varepsilon$, so heißt das also: $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in X$.
Es gilt $\|f-g\| = \|g-f\|$.



(c) $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$ $\forall f,g$

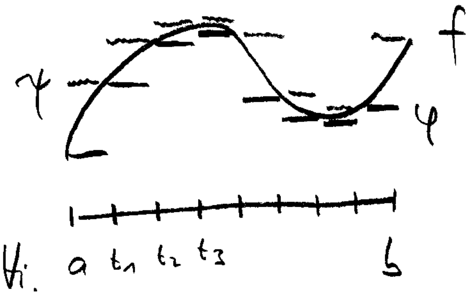


15.7 Lemma: Ist $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, so gilt $|\int\varphi| \le \|\varphi\|(b-a)$.

Beweis: $|\int\varphi| = |\sum c_i(t_i-t_{i-1})| \le \sum \underbrace{|c_i|}_{\le\|\varphi\|}|t_i-t_{i-1}| \le \|\varphi\| \underbrace{\sum(t_i-t_{i-1})}_{=b-a}$ □

15.8 Satz: Zu jeder stetigen Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und $\varepsilon>0$ gibt es Treppenfunktionen $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit
$\varphi\le f\le\psi$ und $\|\psi-\varphi\|<\varepsilon$ (insbes.: $\|f-\varphi\|, \|f-\psi\|<\varepsilon$).

Beweis: Nach 9.10 ist f gleichmäßig stetig, d.h. es ex. ein $\delta>0$, so dass $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.



Sei $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ eine Unterteilung von $[a,b]$ mit $|t_{i-1}-t_i|<\delta\ \forall i$.

Setze $m_i := \min\{f(x)\mid x\in[t_{i-1},t_i]\}$, $\varphi(x):=m_i$, $x\in(t_{i-1},t_i]$

$M_i := \max\{f(x)\mid x\in[t_{i-1},t_i]\}$, $\psi(x):=M_i$, $x\in(t_{i-1},t_i]$

und $\varphi(a):=m_1$, $\psi(a):=M_1$.

Dann sind $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit
$\varphi(x)=m_i\le f(x)\le M_i=\psi(x)\ \forall x\in(t_{i-1},t_i]$

[m_i, M_i ex. nach 9.5 und es gilt $\exists\xi_i,\eta_i\in[t_{i-1},t_i]$ mit $f(\xi_i)=m_i$, $f(\eta_i)=M_i$]

Und es gilt $|\psi(x)-\varphi(x)| = |M_i-m_i| = |f(\eta_i)-f(\xi_i)|<\varepsilon$ für $x\in[t_{i-1},t_i]$, denn $|\eta_i-\xi_i|<|t_i-t_{i-1}|<\delta$.

$\Rightarrow \|\psi-\varphi\| = \sup\{|\psi(x)-\varphi(x)| \mid x\in[a,b]\}<\varepsilon$.

Außerdem $|f(x)-\varphi(x)| = f(x)-\varphi(x)\le\psi(x)-\varphi(x)<\varepsilon\ \forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow \|f-\varphi\|<\varepsilon$ und ebenso $\|f-\psi\|<\varepsilon$.

□

15.9 Definition: Eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt <u>Regelfunktion</u>, falls $\forall \varepsilon>0\ \exists \varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ Treppenfunktion : $\|f-\varphi\|<\varepsilon$

15.10 Proposition:

(a) Jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion.

(b) Jede Treppenfunktion ist eine Regelfunktion.

(c) Sind f,g Regelfunktionen, $\alpha\in\mathbb{R}$, so sind auch αf, $f+g$, fg Regelfunktionen.

(d) Jede stückweise stetige Funktion ist eine Regelfunktion
(d.h. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit einer Unterteilung $a=t_0<\dots<t_n=b$, so dass $f|_{(t_{i-1},t_i)}$ stetig ist für alle $i=1,\dots,n$).

(e) Jede Regelfunktion ist beschränkt.

(f) Jede monotone Funktion ist eine Regelfunktion.

<u>Beweis:</u> (a) 15.8

(b) $\|\varphi-\varphi\|=0<\varepsilon\quad\forall\varepsilon>0$ (ist f Treppenfkt in 15.9, wähle $\varphi=f$)

(c) Sei $\varepsilon>0$, φ,ψ mit $\|f-\varphi\|,\|g-\psi\|<\varepsilon$.

$$\Rightarrow \|(f+g)-(\varphi+\psi)\|\le\|f-\varphi\|+\|g-\psi\|<2\varepsilon$$

$$\|(fg)-(\varphi\psi)\|=\|fg-\varphi g+\varphi g-\varphi\psi\|\overset{15.6(c)}{\le}\underbrace{\|f-\varphi\|}_{<\varepsilon}\|g\|+\|\varphi\|\underbrace{\|g-\psi\|}_{<\varepsilon}$$

(d) Ist f stückweise stetig, so ist $f=g\varphi$ für g stetig, φ Treppenfkt, dann (c).

(e) $\varphi=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{(t_{i-1},t_i)}+\sum_{i=0}^{n}a_i\chi_{\{t_i\}}$ Treppenfkt (wie in 15.2)

$\Rightarrow \varphi$ ist beschränkt mit $\|\varphi\|=\max\{c_1,\dots,c_n,a_0,\dots,a_n\}$.

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Regelfunktion, so ex. φ Treppenfkt mit $\|f-\varphi\|<\varepsilon=1$

$\Rightarrow \|f\|=\|f-\varphi+\varphi\|\le\|f-\varphi\|+\|\varphi\|$, d.h. f beschränkt.

(f) Idee: $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$, Unterteile $[f(a),f(b)]$ in Intervalle der Länge $<\varepsilon$ und unterteile $[a,b]$ dann gemäß deren Urbilder. Definiere dann φ,ψ wie in 15.8. □

15.11 Lemma: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Regelfunktion.

(a) Es existiert eine Folge $\varphi_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ von Treppenfunktionen mit $\|f-\varphi_n\|\xrightarrow{n\to\infty}0$.

(b) Ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|f-\varphi_n\|\to 0$, so ist $(\int\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge reeller Zahlen, also konvergent.

(c) Der Grenzwert von $(\int\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (b) hängt nicht von der Wahl der φ_n ab.

Beweis: (a) nach Def. 15.9

(b) Sei $\varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \|\varphi_n-f\|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Für $n,m\geq N$ gilt also:
$\|\varphi_n-\varphi_m\|\leq\|\varphi_n-f\|+\|f-\varphi_m\|<\frac{\varepsilon}{b-a}$, d.h. $|\int\varphi_n-\int\varphi_m|=|\int(\varphi_n-\varphi_m)|$
$\overset{15.7}{\leq}\|\varphi_n-\varphi_m\|\cdot(b-a)<\varepsilon$, $n,m\geq N$.

(c) Sei $(\tilde\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit $\|f-\tilde\varphi_n\|\to 0$.
Definiere $\psi_n=\begin{cases}\varphi_n & n \text{ gerade}\\ \tilde\varphi_n & n\text{ ungerade}\end{cases}$. Dann $\|\psi_n-f\|\to 0$ und $(\int\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent nach (b).
$\Rightarrow \lim\int\psi_n=\lim\int\psi_{2n}=\lim\int\varphi_n$ und $\lim\int\psi_n=\lim\int\psi_{2n+1}=\lim\int\tilde\varphi_n$
da Teilfolgen konvergenter Folgen den gleichen Limes haben. $\square$

15.12 Definition: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\|\varphi_n-f\|\to 0$. Setze $\int_a^b f(x)\,dx:=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)\,dx$.
(Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nach 15.11).

15.13 Proposition: Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ Regelfunktionen.

(a) Sind $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, so ist auch $\alpha f+\beta g$ eine Regelfunktion und $\int(\alpha f+\beta g)=\alpha\int f+\beta\int g$.

(b) $|\int f|\leq\int|f|\leq\|f\|(b-a)$ „$\int$ ist stetig" „$\int$ ist linear"

(c) $f\leq g \Rightarrow \int f\leq\int g$ „$\int$ ist monoton"

(d) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$, für $c\in[a,b]$.

Beweis: (a) Seien $(\varphi_n),(\psi_n)$ Treppenfunktionen mit $\|f-\varphi_n\|, \|g-\psi_n\|\to 0$.
Dann $\alpha\varphi_n+\beta\psi_n\to\alpha f+\beta g$ und $\underbrace{\int(\alpha\varphi_n+\beta\psi_n)}_{\to\int(\alpha f+\beta g)}\overset{15.4}{=}\underbrace{\alpha\int\varphi_n}_{\to\alpha\int f}+\underbrace{\beta\int\psi_n}_{\to\beta\int g}$.

(b) $\|\varphi_n - f\| \to 0 \Rightarrow \left|\int \varphi_n\right| \overset{15.4}{\leq} \int |\varphi_n| \overset{15.2}{\leq} \|\varphi_n\|(b-a)$

$\qquad\qquad \left|\int f\right| \qquad \int |f| \qquad \|f\|(b-a)$

(c) 1. Fall: $f \equiv 0$. Wähle (φ_n) mit $\|g - \varphi_n\| \to 0$.

Setze $\varphi_n^+(x) := \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{falls } \varphi_n(x) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Also $|g(x) - \varphi_n^+(x)| \leq |g(x) - \varphi_n(x)|$

$\overset{\forall x}{\Rightarrow} \|g - \varphi_n^+\| \leq \|g - \varphi_n\| \to 0 \Rightarrow 0 \overset{15.4}{\leq} \int \varphi_n^+ \to \int g$, d.h. $\int g \geq 0$

2. Fall: f bel. Dann $h := g - f \geq 0 \overset{1. Fall}{\Longrightarrow} \int g - \int f = \int h \geq 0$.

(d) $\varphi_n|_{[a,c]}, \varphi_n|_{[c,b]}$ Treppenfunktionen, $\int_a^b \varphi_n = \int_a^c \varphi_n|_{[a,c]} + \int_c^b \varphi_n|_{[c,b]}$.

$\square$

15.14 Def./Anm.: Eine diffbare Funktion $F: D \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von $f: D \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$.

15.15 Lemma: Sei $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Sei $G: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist G eine Stammfunktion von f genau dann, wenn $F - G$ konstant ist. (D.h. Stammfunktionen bis auf Konstante eindeutig)

Beweis: „$\Leftarrow$" $F - G \equiv C$ konstant $\Rightarrow G' = F' - C' = F' = f$.

„$\Rightarrow$" $H := F - G : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar, $H' = F' - G' = f - f = 0$
$\overset{14.12}{\Longrightarrow}$ H konstant. □

15.16 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) $F_a : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ ist Stammfunktion von f, ebenso $F_b : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$.

(b) Ist $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Beweis: (a) (i) $F_a(x+h) - F_a(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \overset{15.13}{=} \int_x^{x+h} f(t)\,dt$ falls $x+h \in [a,b], h > 0$.

(ii) Die Funktion $\varphi : [x, x+h] \to \mathbb{R},\ t \mapsto C$ ist eine Treppenfunktion mit $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi = C$.

(iii) Zu $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$ mit $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Ist also $0 < h < \delta$, so gilt für $g : [x, x+h] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) - f(x)$, dass $\|g\| < \varepsilon$.

(iv) $$\left| \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} - f(x) \right| \overset{(i,ii)}{=} \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt \right| \overset{15.13}{\leq} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \underbrace{|f(t) - f(x)|}_{= g(t) \leq \|g\|}\,dt$$
$$\overset{15.13}{\leq} \frac{1}{h}\|g\| \cdot h \overset{(iii)}{<} \varepsilon$$

$\Rightarrow F_a$ ist diffbar mit $F_a' = f$.

(b) Nach 15.15 ist $F = F_a + C$ und $\int_a^b f(t)\,dt = F_a(b) = F(b) - C$ und $F_a(a) = 0$, also $F(a) = C$. □

15.17 Bezeichnung: Ist F Stammfunktion von f, so schreibe $F = \int f(x)\,dx$. Beachte: Dies ist nur bis auf eine Konstante bestimmt.
Schreibe $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

15.18 Beispiele: Nach §13, §14:

f	f'
x^n	$n x^{n-1}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$ (z.B. $\frac{1}{x}, \sqrt{x}$)
$\exp$	$\exp$
$\sin$	$\cos$
$\cos$	$-\sin$
$\ln$	$\frac{1}{x}$

etc

Also $\int_a^b t^{n-1}\,dt = \frac{1}{n} t^n\Big|_a^b = \frac{1}{n}(b^n - a^n)$, $\int_a^b \frac{1}{t}\,dt = \ln(b) - \ln(a)$, $0<a<b$ etc.

15.19 Satz (Substitutionsregel): Sei $f: [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, $h: [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar. Dann

$$\int_a^b f(h(t))\, h'(t)\,dt = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx$$

Beweis: Sei F Stammfunktion von f. Also $F \circ h$ Stammfunktion von $(F\circ h)'(x) = F'(h(x))\, h'(x)$. Nach 15.16 gilt also:

$$\int_a^b f(h(t))\, h'(t)\,dt = F\circ h(x)\Big|_a^b = F(h(b)) - F(h(a)) \overset{15.16}{=} \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)\,dx. \quad \square$$

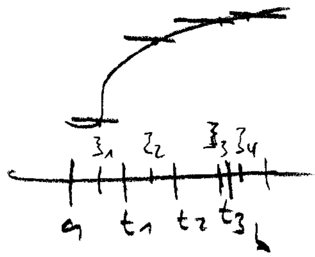
15.20 Beispiel: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, e^{\sin t}\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1$.
$(h(t) := \sin t,\ h'(t) = \cos t,\ f(x) = e^x)$

15.21 Satz (partielle Integration): Sind $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist $\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int f'(x) g(x)\,dx$.

Beweis: $(fg)' = f'g + fg'$ also fg Stammfunktion zu $f'g + fg'$. $\square$

15.22 Beispiel: $\int_a^b \ln(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \ln(x)\, x\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b \frac{1}{x}\cdot x\,dx}_{=b-a} = b\ln(b) - a\ln(a) - (b-a)$.
$(f(x) = \ln(x),\ g(x) = x)$

15.23 Satz (Riemannsche Summen): Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $\varepsilon>0$.
Dann gibt es ein $\delta>0$, so dass für jede Unterteilung $a=t_0<\dots<t_n=b$ mit $|t_j-t_{j-1}|<\delta$, $j=1\dots n$ und jedes $\xi_j\in[t_{j-1},t_j]$ gilt:
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j-t_{j-1})\right|<\varepsilon$$



Beweis: Da f gleichmäßig stetig ist, ex. $\delta>0$ mit
$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$
Sind nun eine Unterteilung $a=t_0<\dots<t_n=b$, $|t_j-t_{j-1}|<\delta$, $\xi_j\in[t_{j-1},t_j]$ gegeben, dann setze $\varphi(x):=\begin{cases} f(\xi_j) & x\in(t_{j-1},t_j] \\ f(\xi_1) & x=a\end{cases}$, also ist φ Treppenfkt.
Es gilt $\int_a^b\varphi(x)\,dx=\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j-t_{j-1})$ und $\|\varphi-f\|=\sup\limits_{x\in[a,b]}|\varphi(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.
$[a,b]=[a,t_1]\cup(t_1,t_2]\cup\dots\cup(t_{n-1},t_n]$
Also $\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b\varphi(x)\,dx\right|\overset{15.13}{\le}\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\,dx\overset{15.13}{\le}\|f-\varphi\|\cdot(b-a)<\varepsilon$.
(vgl. mit 15.8) $\square$

15.24 Definition: Sei $I=(a,b)$ ein Intervall mit $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$.
Sei $f:I\to\mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f_{|[c,d]}:[c,d]\to\mathbb{R}$ für alle Intervalle $[c,d]\subseteq I$ eine Regelfunktion ist.
Falls $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\int_x^y f(t)\,dt$ existiert (d.h. für alle Folgen $a_n\to a$, $b_n\to b$ konvergiert $\int_{a_n}^{b_n} f(t)\,dt$ gegen den gleichen Wert), so heißt das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent und $\int_a^b f(x)\,dx:=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\int_x^y f(t)\,dt$.

15.25 Beispiel: $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx=\,?$, $s>0$.

1.) $s>1$: $\int_1^{b_n}\frac{1}{x^s}\,dx=-\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{x^{s-1}}\Big|_1^{b_n}=-\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{b_n^{s-1}}-1\right)\to\frac{1}{s-1}$

2.) $s=1$: $\int_1^{b_n}\frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_1^{b_n}=\ln b_n-0\to\infty$, Integral ex. nicht

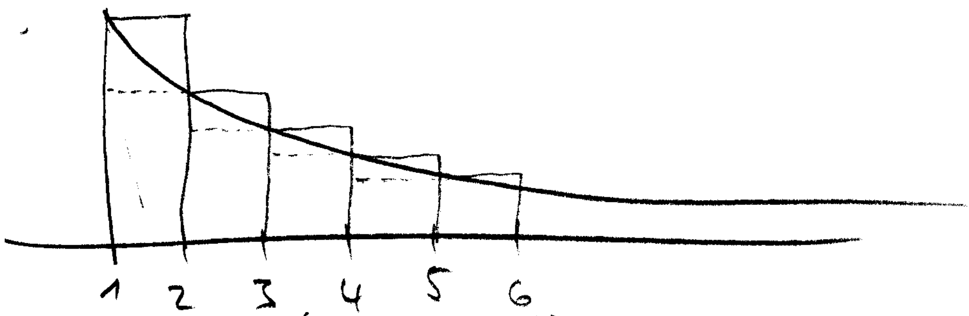
3.) $s<1$: ex. nicht.

15.26 Satz (Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen):

Sei $f: [1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergiert}$$

Beweis:



Es gilt $\sum_{n=2}^{N+1} f(n) \le \int_1^N f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N} f(n)$. $\square$

15.27 Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$ konvergiert, was nach 15.25 genau dann der Fall ist, wenn $s<1$.

Insbesondere divergiert die harmonische Reihe, da $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ divergiert (alternativer Beweis für die Divergenz von $\sum \frac{1}{n}$).

15.28 Definition: Seien $f_n: D \to \mathbb{R}$ Funktionen für $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$, falls
$\|f_n - f\| \to 0$, $n \to \infty$.

15.29 Bemerkung: (a) Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, so existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert (Lemma 15.11).

(b) Es gibt auch punktweise Konvergenz: $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$ $\forall x \in D$.
Dies ist aber schwächer, denn bei gleichmäßiger Konvergenz gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N \;\; \forall x \in D: \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
(denn $\|f_n - f\| = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in D\} < \varepsilon$ für $n \geq N$)
Also ein N für alle $x \in D$. Insofern: gl.m. konv. $\Rightarrow$ pktw. konv.
Bsp.: $f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$ konvergiert punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.
Gleichmäßige Konvergenz ist besser – sie erhält z.B. Stetigkeit

15.30 Lemma: Sei $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f stetig und es gilt
$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

Beweis: Sei $x \in [a,b]$ und $\varepsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Sei $\delta > 0$, so dass $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ falls $|x-y| < \delta$.
Sei nun $y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$. Dann gilt:
$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\leq \|f - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(y) - f(y)|}_{\leq \|f - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$
Des Weiteren $\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \overset{15.13}{\leq} \|f - f_n\|(b-a) \to 0$.
□

15.31 Bemerkung: (a) Lemma 15.30 ist falsch mit punktweiser Konvergenz (15.29(b)).
(b) Lemma 15.30 gilt auch, wenn man „stetig" durch „Regelfunktion" ersetzt.

15.32 **Definition**: Eine Potenzreihe (um $a \in \mathbb{R}$) ist ein formaler Ausdruck der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ mit $c_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).
Die Potenzreihe konvergiert für $x_1 \in \mathbb{R}$, falls $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_1-a)^n$ konvergiert.
Wir bezeichnen mit $r := \sup\{|x_1-a| \mid \sum c_n(x_1-a)^n \text{ konvergiert}\}$ ihren Konvergenzradius. Hierbei ist $r=\infty$ möglich.

15.33 Bemerkung: Potenzreihen sind „verallgemeinerte Polynome". Was ist ihr Konvergenzradius, ihre Ableitung? Wir summandenweise ableiten – darf man das?

15.34 Satz: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ eine Potenzreihe, die für $x_1 \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), $x_1 \neq a$ konvergiert.

(a) Dann konvergiert die Potenzreihe für alle $w \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit $|w-a| < |x_1-a|$, d.h. $r \geq |x_1-a|$.

(b) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$ konvergiert ebenfalls mit $r \geq |x_1-a|$.

(c) Ist $f: \{w \in \mathbb{R} \mid |w-a| < r\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, so ist f diffbar mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$.

(d) f ist sogar unendlich oft diffbar und es gilt $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Beweisskizze: (a) Da $\sum c_n (x_1-a)^n$ konvergiert, ist $c_n(x_1-a)^n$ eine Nullfolge, d.h. $\exists C > 0$ mit $|c_n(x_1-a)^n| < C \ \forall n \in \mathbb{N}$. Mit $q := \left|\frac{w-a}{x_1-a}\right| < 1$ ist $|c_n(w-a)^n| \leq |c_n(x_1-a)^n| \left|\frac{w-a}{x_1-a}\right|^n \leq C q^n$, also $\sum |c_n(w-a)^n| \leq C \sum q^n < \infty$ Maj.krit.

(b) ähnlich

(c) $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} c_n(x-a)^n$, $f_N'(x) = \sum_{n=1}^{N} n c_n (x-a)^{n-1}$, $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

(f_N) konvergiert gleichmäßig gegen f: $|f(w) - f_N(w)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} C q^n < \varepsilon \quad \forall w$ uniform.
Ebenso $f_N' \to g$ glm.

$$\text{HSDI \& 15.30: } \underbrace{f_N(x)}_{\to f(x)} = \underbrace{f_N(a)}_{\to f(a)} + \underbrace{\int_a^x f_N'(t)\,dt}_{\to \int_a^x g(t)\,dt} \overset{\text{HSDI}}{\Longrightarrow} f'(x) = g(x) \text{ und } f \text{ diffbar.}$$

(d) $f(a) = c_0$, $f'(a) = c_1$, $f''(a) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2} = 2c_2$ etc.

$\square$

15.35 Definition: Ist $f:[b,c]\to\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, $a\in[b,c]$, so heißt $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ die Taylorreihe zu f.

15.36 Satz (Taylorsche Formel): Sei $f:[b,c]\to\mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig diffbar. Dann ist $f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\underbrace{\frac{1}{k!}\int_a^x(x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt}_{=:R_{k+1}(x)}$ und $R_{k+1}(x)\to 0$ für $k\to\infty$.

(d.h. f ist gut durch ein Polynom approximierbar)

Beweis: $f(x)=f(a)+R_1(x)$ nach HSDI, dann Induktion mit partieller Integration:

$$\int(x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt=\frac{-1}{k+1}(x-t)^{k+1}f^{(k+1)}(t)\Big|_a^x+\int_a^x\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}f^{(k+2)}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow\quad R_{k+1}(x)=\frac{1}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}f^{(k+1)}(x)+R_{k+2}(x).\qquad\square$$

15.37 Beispiel: (a) $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ ist eine Potenzreihe um $a=0$ mit Konvergenzradius $r=\infty$ und Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\exp(x)$.

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{x}$. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=\,?$

$f^{(1)}(x)=-x^{-2}$, $f^{(2)}(x)=2x^{-3}$, $f^{(3)}(x)=-3!\,x^{-4}$, …, $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)}$

Also $\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$. Konvergent für $|x-1|<1$.

(Test: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}$ für $|1-x|<1$)

Da $x\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}$ nach 15.34 Stammfunktion zu $\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ ist, ist $\ln x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}$ für $|1-x|<1$.

(c) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}x^n$, $\sin^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^m & n=2m+1\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$