§4 Vollständigkeitsaxiom

Was unterscheidet $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$? Die Axiome 1 bis 3 jedenfalls nicht. Aber wollen z.B. $\pi \in \mathbb{R}$ und $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (3{,}1\ ,\ 3{,}14\ ,\ 3{,}141\ ,\ 3{,}1415\ ,\ \dots)$ mit $a_n \to \pi, n\to\infty$ ist $a_n \in \mathbb{Q}\ \forall n\in\mathbb{N}$ aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \notin \mathbb{Q}$. Wir müssen also fordern, dass solche Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren.

4.1 <u>Definition</u>: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt <u>Cauchyfolge</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n \geq N: \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

4.2 <u>Bemerkung</u>: In einer Cauchyfolge werden Abstände der Folgenglieder also beliebig klein. In $\mathbb{R}$ wird das bedeuten: Die Folge konvergiert, aber der Grenzwert ist unbekannt. Kann also Konvergenz prüfen, ohne Grenzwert zu kennen.

4.3 <u>Satz</u>: Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

<u>Beweis</u>: Sei $\varepsilon > 0$ und $N\in\mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N$.

Für $n,m \geq N$ dann: $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon$ □

4.4 <u>Bemerkung</u>: Gilt auch die Umkehrung? Nein in $\mathbb{Q}$ (z.B. mit obiger Folge $a_n \to \pi, n\to\infty$). Ja, in $\mathbb{R}$, denn wir nehmen das als Axiom hinzu.

4.5 <u>Axiom 4</u>: $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert gegen einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

4.6 <u>Bemerkung</u>: Ob eine Folge eine Cauchyfolge ist oder nicht, muss man anhand <u>aller</u> $m,n \geq N$ überprüfen. Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder genügt nicht: Betrachte $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Dann $|s_{n+1} - s_n| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ für große n, aber $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht in $\mathbb{R}$. Also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge.

4.7 <u>Definition</u>: Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$. Wir definieren <u>Intervalle</u>:

$[a,b] := \{x\in\mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$[a,b) := \{x\in\mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall

$(a,b] := \{x\in\mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$(a,b) := \{x\in\mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$[a,\infty) := \{x\in\mathbb{R} \mid a \leq x\}$

$(-\infty,b) := \{x\in\mathbb{R} \mid x < b\}$

etc.

$|I| := b - a$ Länge des Intervalls für $I = [a,b], (a,b)$ etc.

4.8 Satz: Das Vollständigkeitsaxiom ist äquivalent zum Intervallschachtelungsprinzip.

Intervallschachtelungsprinzip: Sei $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$, so dass $|I_n| \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$.
Dann gibt es genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$.

Bew: 1.) Vollst.ax. $\Rightarrow$ Int.prinzip: Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit $|I_n| = b_n - a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Behauptung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.

Beweis der Beh.: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N \in \mathbb{N}$, so dass $|I_n| < \varepsilon$ für $n \geq N$.
Für $n, m \geq N$ gilt dann $a_n, a_m \in I_N$ (da $I_n, I_m \subseteq I_N$) und also
$|a_n - a_m| \leq |I_N| < \varepsilon$, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge. $\square$(Beh.)

Nach dem Vollständigkeitsaxiom konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also. Setze $x := \lim_{n\to\infty} a_n$.
Sei $k \in \mathbb{N}$. Für $n \geq k$ gilt dann $a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_k \overset{3.14(a)}{\Longrightarrow} a_k \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{=x} \leq b_k$
$\Rightarrow x \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. $\{x\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Sind nun $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, so gilt $0 \leq |a-b| \leq |I_n| \ \forall n \in \mathbb{N} \overset{3.14(b)}{\Longrightarrow} |a-b| = 0$.
Also $a = b$, d.h. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ besteht aus genau einem Punkt, nämlich x.

2.) Int.prinzip $\Rightarrow$ Vollst.ax.: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.
Zu $\varepsilon = 2^{-k}$ gibt es also $n_k \in \mathbb{N}$ mit $\forall n, m \geq n_k: |a_n - a_m| < 2^{-k}$ (*).
Wähle induktiv $n_k < n_{k+1}$.
Setze $I_k := \{z \in \mathbb{R} \mid |z - a_{n_k}| \leq 2^{-k+1}\}$, also $I_{k+1} \subseteq I_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
$\overset{3.11}{=} [a_{n_k} - 2^{k+1}, a_{n_k} + 2^{k+1}]$ und $|I_k| = 2^{-k} \to 0, k \to \infty$

$\left(z \in I_{k+1} \Rightarrow |z - a_{n_k}| \leq |z - a_{n_{k+1}}| + |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \overset{(*)}{<} 2^{-(k+1)+1} + 2^{-k} = 2 \cdot 2^{-k} = 2^{-k+1} \Rightarrow z \in I_k \right)$

Nach dem Int.sch.prinzip ist also $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{a\}$.

Dann gilt für $n \geq n_k$: $|a - a_n| \leq \underbrace{|a - a_{n_k}|}_{\leq 2^{-k+1}} + \underbrace{|a_{n_k} - a_n|}_{\overset{(*)}{<} 2^{-k}} \leq 2 \cdot 2^{-k+1} = 2^{-k+2}$
$a \in I_k$
$\Rightarrow a_n \to a, n \to \infty$.

$\square$

4.9 Bemerkung: (a) Im Beweis von Satz 4.8(1.) ist auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $b_n \to x = \lim_{n\to\infty} a_n$, $n\to\infty$.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge (also $n_1<n_2<n_3<\dots$), die gegen a konvergiert, so konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Und: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so auch $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit gleichem Grenzwert. (Bl. 4, A3)

(Wie im Beweis von Satz 4.8(2.): Sei $\varepsilon>0$ und $N\in\mathbb{N}$ so dass
$|a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ für $n,m\geq N$ und $|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ für ein $n_k\geq N$.
Also für $n\geq N$: $|a_n-a|\leq|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$)

(c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, so gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|a_{n_k}-a_{n_\ell}|<2^{-k}$ falls $n_\ell>n_k$. (wie im Beweis von 4.8(2.))

(d) In 4.8 benötigt man abgeschlossene Intervalle, denn z.B. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,\frac{1}{n}]=\emptyset$.

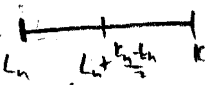
(e) Es ist besser Axiom 4 als Vollständigkeitsaxiom zu definieren und nicht als Intervallschachtelungsprinzip (obwohl diese ja äquivalent sind), da die formalen Voraussetzungen für das Vollst.ax. viel kleiner als beim Int.prinzip sind (letzteres benötigt Intervalle).

4.10 Satz (Bolzano-Weierstraß ≈ 1850): Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. $\exists K_0,L_0\in\mathbb{R}$ mit $a_n\in I_0:=[K_0,L_0]$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Definiere nun rekursiv Intervalle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(i) $I_{n+1}\subseteq I_n$
(ii) $|I_n|=2^{-n}|L_0-K_0|$
(iii) I_n enthält unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ist das $I_n = [L_n,K_n]$ bereits definiert, so liegen entweder in $[L_n, L_n+\frac{K_n-L_n}{2}]$ oder in $[L_n+\frac{K_n-L_n}{2}, K_n]$ unendlich viele Folgenglieder ($I_n=$ 

). Wähle jene Hälfte als I_{n+1}. Also sind (i) bis (iii) auch für I_{n+1} erfüllt.

Wähle nun eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k}\in I_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$.
($a_{n_1}:=a_1$, sind dann $n_1<\dots<n_k$ und $a_{n_1},\dots,a_{n_k}$ schon gewählt, so ex. $a_{n_{k+1}}\in I_{k+1}$ mit $n_{k+1}>n_k$, da I_{k+1} unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält).

z.z.: $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge (also konvergent in $\mathbb{R}$).
Sei dazu $\varepsilon>0$ und $N\in\mathbb{N}$ so dass $|I_N|<\varepsilon$. Für $k,l\geq N$ gilt dann:
$|a_{n_k}-a_{n_l}|\leq |I_N|<\varepsilon$, denn $a_{n_k}\in I_k\subseteq I_N$, $a_{n_l}\in I_l\subseteq I_N$. □

4.11 Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Eine Zahl $a\in\mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=a$.

4.12 Beispiel: (a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der einzige HP.
(b) Die Folge $a_n=(-1)^n$ hat die HPe -1 und 1.
(c) Die Folge $a_n=n$ hat keinen HP.

4.13 Korollar: Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.
Beweis: Folgt direkt aus Satz 4.10. □

4.14 Korollar: Seien $a<b\in\mathbb{R}$ reelle Zahlen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten im Intervall $[a,b]$. Dann häufen sich die Werte der Folge in mindestens einem Punkt.
(Diese Version von Bolzano-Weierstraß ist eine Aussage über die Struktur von Intervallen in $\mathbb{R}$: Sie sind „kompakt", d.h. streut man unendlich viele Zahlen in das Intervall, müssen sie sich irgendwo häufen.)
Bew: direkt aus 4.13. □

4.15 Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt
(a) [streng] monoton wachsend, falls $a_n\leq a_{n+1}$ [bzw. $a_n<a_{n+1}$] $\forall n\in\mathbb{N}$
(b) [streng] monoton fallend, falls $a_n\geq a_{n+1}$ [bzw. $a_n>a_{n+1}$] $\forall n\in\mathbb{N}$

4.16 Beispiel: (a) $a_n=n$ ist streng monoton wachsend, $a_n=-n^2$ str. mon. fallend.
(b) $(a_n)=(1,1,1,1,2,3,4,\dots)$ ist monoton wachsend
(c) $a_n=(-1)^n$ ist weder monoton wachsend noch fallend

4.17 Bem: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend [fallend] und konvergent mit $a:=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, so ist $a_n\leq a$ [bzw. $a_n\geq a$] $\forall n\in\mathbb{N}$.

4.18 Satz: Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton wachsend (analog für fallend).
Nach Bolzano-Weierstraß (4.10) ex. eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
Setze $a := \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, so dass $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$.
Für $n \geq n_k$ gilt dann: $|a_n - a| < \varepsilon$, denn $a_{n_k} \leq a_n \underset{\text{für ein } n_\ell \geq n}{\leq} a_{n_\ell} \leq a$. □

(Existenz k-ter Wurzeln in $\mathbb{R}$)

4.19 Satz: Sei $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Dann ex. ein eindeutig bestimmtes $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ mit $x^k = a$. Schreibe $x = \sqrt[k]{a}$.

Beweis: Sei $M \in \mathbb{N}$ mit $M^k > a$.
Konstruiere nun rekursiv Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit:

(i) (x_n) ist monoton wachsend und (y_n) ist monoton fallend
(ii) $x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $y_n - x_n \leq \frac{M}{2^{n-1}}$
(iv) $x_n^k \leq a \leq y_n^k \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(Idee: schachteln: 0, a, $(\frac{M}{2})^k$, M^k)

Seien dazu $x_1 := 0$, $y_1 := M$. Sind nun x_n, y_n schon konstruiert, so wähle
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n,\ y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} & \text{falls } \left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)^k > a \\ x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2},\ y_{n+1} = y_n & \text{falls } \left(\frac{x_n+y_n}{2}\right)^k \leq a \end{cases}$$
Dies erfüllt (i)-(iv).

Nach 4.18 ex. also $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y := \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Nach 3.14(5) (wegen $x_n \leq y_n \overset{(iii)}{\leq} x_n + \frac{M}{2^{n-1}}$) also $x = y$. Und nach (iv) gilt
$$x^k \leq a \leq y^k = x^k, \text{ d.h. } x^k = a.$$
Eindeutig? Sind $x > 0$ und $x' > 0$ mit $x^k = x'^k = a$, so ist o.E. $x \leq x'$.
Falls $x < x'$, so auch $a = x^k \overset{k\geq 2}{<} x^{k-1} \cdot x' < x^{k-2} x'^2 < \ldots < x'^k = a$ ↯

□

4.20 Proposition: Sei $a > 0$ und $x_1 > 0$. Definiere die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. Dann $x_n \to \sqrt{a}$, $n \to \infty$.

Beweis: Es gilt: (i) $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (klar nach Def)
(ii) $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \geq 2$. (Beachte: $x_2 > x_1$, falls $\frac{a}{x_1} > x_1$)

Beweis von (ii):
$$x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4}x_n^2 + \frac{1}{2}a - a + \frac{1}{4}\frac{a^2}{x_n^2} = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 \ge 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \quad x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) \ge 0, \quad n \ge 2$$
□(ii)

Nach Bolzano-Weierstraß ex. also $x := \lim_{n\to\infty} x_n$.

Da $\underset{\downarrow x}{2x_{n+1}} \cdot \underset{\downarrow x}{x_n} = \underset{\downarrow x^2}{x_n^2} + a$ für $n \to \infty$, ist $2x^2 = x^2 + a$, d.h. $x^2 = a$.

□

4.21 Bemerkung: (a) Der Algorithmus in 4.20 ist sehr schnell, denn für $x_n = \sqrt{a}(1+f_n)$ ist der Fehler $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ klein: $f_{n+1} \le \frac{1}{2}\min(f_n, f_n^2)$.

Für $a = 2$, $x_1 = 1$ bspw.
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = 1{,}41\overline{6}$$
$$x_4 = 1{,}414215$$
$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$$

(b) $x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$ liefert $\sqrt[k]{a}$.

(c) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus 4.20 ist ein besseres Beispiel für eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, die nicht konvergiert, denn nach §1 wissen wir $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $(a = 2, x_1 = 1)$

4.22 Proposition: Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Insbesondere konvergiert die Folge $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Beweis: Setze $x_n := \sqrt[n]{n} - 1 \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann: $n = (1+x_n)^n \underset{\text{binom. Lehrsatz}}{=} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k} x_n^k 1^{n-k}}_{\ge 0} \ge \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \Rightarrow x_n^2 \le \frac{2}{n-1} \to 0$

$\Rightarrow x_n^2 \to 0, n \to \infty \underset{\text{(Beweis durch Kontraposition)}}{\Rightarrow} x_n \to 0, n \to \infty$

□

4.23 Korollar: Es gilt: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für alle $a > 0$.

Beweis: 1. Fall $a \ge 1$: $1 \le \sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{n}$ für $n > a \overset{3.14(b)}{\Longrightarrow} \sqrt[n]{a} \to 1, n \to \infty$

2. Fall $a \le 1$: Dann $\frac{1}{a} \ge 1$ und $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \xrightarrow{1. \text{Fall}} 1, n \to \infty$

$\overset{3.12(e)}{\Longrightarrow} \sqrt[n]{a} \to 1, n \to \infty$

□

(nach der Eindeutigkeit der n-ten Wurzel: $z := \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ erfüllt $z^n = \frac{1}{a}$. Also $z = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$.)