§6 Umordnung von Reihen, Summierbarkeit

Hatten in §5 gesehen, dass $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Man kann zeigen (s. Bl. HG, Zusatzaufgabe), dass diese Reihe so umgeordnet werden kann, dass sie gegen jeden beliebigen Wert konvergiert. Mit anderen Worten: $\forall W \in \mathbb{R}\ \exists \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = W$$

Das ist bei absolut konvergenten Reihen nicht der Fall und auch bei endlichen Summen spielt die Reihenfolge keine Rolle:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \quad \text{für jede Permutation } \varphi: \{1,\dots,n\} \xrightarrow{\text{bij}} \{1,\dots,n\}.$$

6.1 Beispiel: Betrachte $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} =: S$

Sei $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{\varphi(k)+1} \frac{1}{\varphi(k)} = \underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}} + \frac{1}{7} - \dots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

$$= \frac{1}{2} S$$

6.2 Definition: Sei I eine Indexmenge. Eine <u>Familie</u> reeller Zahlen $(a_i)_{i \in I}$ ist eine Abbildung $I \to \mathbb{R}$, $i \mapsto a_i$.

6.3 Bemerkung: Ist $I = \{1,\dots,n\}$, so ist $(a_i)_{i \in I}$ das Tupel $(a_1, \dots, a_n)$.
Ist $I = \mathbb{N}$, so ist $(a_i)_{i \in I}$ eine Folge.

6.4 Proposition: Sei I abzählbar und unendlich und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie reeller Zahlen. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) $\forall \varepsilon>0\ \exists E\subseteq I$ endliche Teilmenge $\forall F\subseteq I$ endliche Teilmenge mit $F\cap E=\emptyset$:
$$\sum_{i\in F}|a_i|<\varepsilon$$

(ii) $\exists K\geq 0\ \forall G\subseteq I$ endliche Teilmenge : $\sum_{i\in G}|a_i|\leq K$

(iii) Für jede Abzählung $i_1,i_2,\ldots$ von I ist $\sum_{n=1}^{\infty}a_{i_n}$ absolut konvergent.
(d.h. $\forall \varphi: \mathbb{N}\xrightarrow{\text{bij.}} I$: $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\varphi(n)}$ absolut konvergent)

(iv) Für mindestens eine Abzählung $i_1,i_2,\ldots$ von I ist $\sum_{n=1}^{\infty}a_{i_n}$ absolut konvergent.

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii): Zu $\varepsilon=1$ ex. $E\subseteq I$ endlich wie in (i).
Setze $K:=\sum_{i\in E}|a_i|+1$ (endliche Summe). Ist nun $G\subseteq I$ eine endliche Teilmenge, so ist $F:=G\setminus E$ endlich mit $F\cap E=\emptyset$.
Also $\sum_{i\in F}|a_i|<1$ und $\sum_{i\in G}|a_i|\leq\sum_{i\in E\cup G}|a_i|=\sum_{i\in E}|a_i|+\sum_{i\in G\setminus E}|a_i|<K$
$(E\cup G=E\,\dot\cup\,(G\setminus E))$

(ii)$\Rightarrow$(iii): Sei $i_1,i_2,\ldots$ eine Abzählung von I. Dann gilt:
$S_n:=\sum_{k=1}^{n}|a_{i_k}|=\sum_{i\in\{i_1,\ldots,i_n\}}|a_i|\leq K$ nach (ii), d.h. die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen ist monoton wachsend und beschränkt $\overset{4.18}{\Rightarrow}$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(iii)$\Rightarrow$(iv): Klar.

(iv)$\Rightarrow$(i): Sei $i_1,i_2,\ldots$ eine Abzählung, so dass $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{i_k}|=:S$ konvergiert.
Sei $\varepsilon>0$. Sei $N\in\mathbb{N}$, so dass $\left|S-\sum_{k=1}^{N}|a_{i_k}|\right|<\varepsilon$.
Setze $E:=\{i_1,\ldots,i_N\}$. Ist nun $F\subseteq I$ endliche Teilmenge mit $F\cap E=\emptyset$,
so ist $\sum_{i\in F}|a_i|\leq\sum_{i\in I\setminus E}|a_i|=\left|S-\sum_{i\in E}^{\prime}|a_i|\right|=\left|S-\sum_{k=1}^{N}|a_{i_k}|\right|<\varepsilon$.

Habe also gezeigt: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i). $\square$

6.4b Bemerkung: Eigenschaft (i) von 6.4 zeigt, dass $\sum_{i\in E}|a_i|$ in gewisser Weise die ganze Masse von $\sum_{i\in I}|a_i|$ trägt. Eigenschaft (iii) zeigt, dass die Summationsreihenfolge egal ist.

6.5 Definition: Eine Familie $(a_i)_{i\in I}$ reeller Zahlen mit abzählbarer Indexmenge I heißt absolut summierbar, falls eine (und damit alle) der Bedingungen aus Prop. 6.4 erfüllt sind.

Die Familie heißt summierbar mit Summe $s\in\mathbb{R}$, falls

$\forall \varepsilon>0\ \exists F\subseteq I$ endliche Teilmenge $\forall E\subseteq I$ endliche Teilmenge mit $F\subseteq E$:

$$\Big|s-\sum_{i\in E} a_i\Big|<\varepsilon.$$

Schreibe dann $\sum_{i\in I} a_i = s$.

6.6 Bemerkung: ~~(a) Eigenschaft (i) von 6.4 zeigt, dass~~ $\cancel{\sum_{i\in E} a_i}$ ~~im Grunde schon s ist. Eigenschaft (iii) zeigt, dass die Reihenfolge der Summation egal ist.~~

(b) Man kann sich überlegen, dass $s\in\mathbb{R}$ aus Def. 6.5 eindeutig ist.

(a) Man kann sich überlegen, dass $(a_i+b_i)_{i\in I}$ und $(\lambda a_i)_{i\in I}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ absolut summierbar sind, sofern $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_i)_{i\in I}$ dies schon sind.

6.7 Lemma: Jede absolut summierbare Familie ist summierbar.

Beweis: Zu $\varepsilon=\frac{1}{n}$ ex. eine endliche Teilmenge $E_n\subseteq I$, so dass für jede endliche Teilmenge $F\subseteq I$ mit $F\cap E_n=\emptyset$ gilt: $\sum_{i\in F}|a_i|<\frac{1}{n}$.

Kann annehmen, dass $E_1\subseteq E_2\subseteq E_3\subseteq\ldots$ gilt ($E'_{n+1}:=E_n\cup E_{n+1}$)

Behauptung: $s_n:=\sum_{i\in E_n} a_i$ ist eine Cauchyfolge.

Bew. d. Beh.: Sei $\varepsilon>0$. Wähle $N\in\mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N}<\varepsilon$. Für $m>n\geq N$ gilt dann:

$$|s_m-s_n| = \Big|\sum_{i\in E_m} a_i-\sum_{i\in E_n} a_i\Big| = \Big|\sum_{i\in E_m\setminus E_n} a_i\Big| \leq \sum_{i\in E_m\setminus E_n}|a_i| \underset{(E_m\setminus E_n\,\cap\, E_n=\emptyset)}{<} \frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

$\square$(Beh.)

Z.z.: $(a_i)_{i\in I}$ ist summierbar zu $s:=\lim_{n\to\infty} s_n$.

Sei $\varepsilon>0$. Sei $N\in\mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$ und $|s-s_N|<\frac{\varepsilon}{2}$. Setze $F:=E_N$.

Sei nun $E\subseteq I$ endlich mit $F\subseteq E$. Dann gilt:

$$\Big|s-\sum_{i\in E} a_i\Big| \leq \underbrace{\Big|s-\sum_{i\in E_N} a_i\Big|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\Big|\sum_{i\in E\setminus E_N} a_i\Big|}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ da } E\setminus E_N\,\cap\, E_N=\emptyset} < \varepsilon.$$

$\square$

6.8 Satz: Eine Familie ist absolut summierbar genau dann, wenn sie summierbar ist.

Beweis: „$\Rightarrow$" Lemma 6.7

„$\Leftarrow$" Sei $(a_i)_{i\in I}$ summierbar zu $s\in\mathbb{R}$.

Frage: Was geben die a_i an negativen, was an positiven Anteilen zur Summe?

Schreibe $a_i = a_i^+ + a_i^-$, wobei $a_i^+ := \begin{cases} a_i & a_i \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $a_i^- := \begin{cases} a_i & a_i < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Zerlege $I = P \dot\cup Q$ disjunkt in $P := \{i\in I \mid a_i \ge 0\}$, $Q := \{i\in I \mid a_i < 0\}$, also $I = P \cup Q$ und $P \cap Q = \emptyset$.

Beh.: $(a_i^+)_{i\in I}$ ist absolut summierbar im Sinne von 6.4(i).

Bew. d. Beh.: Sei $\varepsilon > 0$. Da $(a_i)_{i\in I}$ summierbar zu s ist, ex. $F_0 \subseteq I$ endlich, so dass für alle $F_0 \subseteq G \subseteq I$ endlich: $\left|s - \sum_{i\in G} a_i\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze $E := F_0$. Sei nun $F \subseteq I$ endlich mit $F \cap E = \emptyset$. Dann:

$$\sum_{i\in F} |a_i^+| = \sum_{i\in F\cap P} a_i = \left|\sum_{i\in E\cup(F\cap P)} a_i - \sum_{i\in E} a_i + s - s\right| \le \underbrace{\left|\sum_{i\in E\cup(F\cap P)} a_i - s\right|}_{\overset{F_0\subseteq (E\cup(F\cap P))}{\le \frac{\varepsilon}{2}}} + \underbrace{\left|s - \sum_{i\in E} a_i\right|}_{\overset{E=F_0}{\le \frac{\varepsilon}{2}}} < \varepsilon$$

□(Beh.)

Ebenso kann man zeigen: $(a_i^-)_{i\in I}$ ist absolut summierbar $\overset{6.6(a)}{\Longrightarrow} (a_i)_{i\in I} = (a_i^+ + a_i^-)_{i\in I}$ absolut summierbar □

6.9 Bemerkung: Wir haben also: absolut summierbar $\Leftrightarrow$ summierbar

aber absolut konvergent $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ konvergent für Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Anschaulich: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so auch absolut summierbar (unabhängig von dieser Abzählung von $I = \mathbb{N}$: $1, 2, 3, \dots$, siehe 6.4(iv)) und insbesondere invariant unter Änderung der Summationsreihenfolge.

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hingegen nur bedingt konvergent (also konvergent, aber nicht absolut konvergent), so ist die Reihe nicht summierbar. Denn sonst wäre $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ auch absolut summierbar, d.h. insbesondere (nach 6.4(iii)) in der Abzählung $1, 2, 3, \dots$ absolut konvergent. Wie passt das zusammen, konvergent sein, aber nicht summierbar? Sei $s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. (Bsp: $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$)

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - s\right| < \varepsilon$ für $n \ge N$.

Setze $F := \{1, \dots, N\}$. konvergent: $\left|\sum_{i\in E} a_i - s\right| < \varepsilon$ nicht für $E = F \cup \{N+2, N+4, \dots, N+2K\}$

summierbar: $\left|\sum_{i\in E} a_i - s\right| < \varepsilon$ auch für $E = F \cup \{N+2, N+4, \dots, N+2K\}$

6.10 Satz (großer Umordnungssatz): Sei I abzählbar und $(a_i)_{i\in I}$ summierbar.

Sei K abzählbar und $(I_k)_{k\in K}$ eine disjunkte Zerlegung von I,

d.h. $I=\bigcup_{k\in K} I_k$, $I_k\cap I_l=\emptyset$ für $k\neq l$.

Dann sind auch alle Teilfamilien $(a_i)_{i\in I_k}$ summierbar (für alle $k\in K$)

und es gilt
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} a_i\right)$$

Beweis: Da $(a_i)_{i\in I}$ insbesondere absolut summierbar ist, ex. nach 6.4(ii) ein $M\geq 0$ mit: $\sum_{i\in G}|a_i|\leq M$ für alle $G\subseteq I$ endlich, insbesondere für $G\subseteq I_k\subseteq I$ endlich.

Also ist auch $(a_i)_{i\in I_k}$ summierbar (nach 6.4(ii) & 6.7). Setze $s_k:=\sum_{i\in I_k}a_i$.

Beh.: $(s_k)_{k\in K}$ ist summierbar zu $s:=\sum_{i\in I}a_i$.

Vor.: Level (L1): $(a_i)_{i\in I}$ summierbar zu s.

Level ($L2_k$): $(a_i)_{i\in I_k}$ summierbar zu s_k, für jedes $k\in K$.

ZZ: Level (L3): $(s_k)_{k\in K}$ summierbar zu s.

Sei dazu $\varepsilon>0$.

(L1): Finde $F_1\subseteq I$ endlich, so dass $\forall F_1\subseteq E_1\subseteq I$ endlich: $\left|s-\sum_{i\in E_1}a_i\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

(L3): Setze $F_3:=\{k\in K\mid F_1\cap I_k\neq\emptyset\}\subseteq K$ endlich.

Sei nun $F_3\subseteq E_3\subseteq K$ endlich und $m:=|E_3|$. Frage: $\left|s-\sum_{k\in E_3}s_k\right|<\varepsilon$?

($L2_k$): Zu jedem $k\in K$ finde $F_2^k\subseteq I_k$ endlich, so dass $\forall F_2^k\subseteq E_2^k\subseteq I_k$ endlich gilt: $\left|s_k-\sum_{i\in E_2^k}a_i\right|<\frac{\varepsilon}{2m}$. Gilt also insbesondere für $E_2^k:=F_2^k\cup(I_k\cap F_1)$.

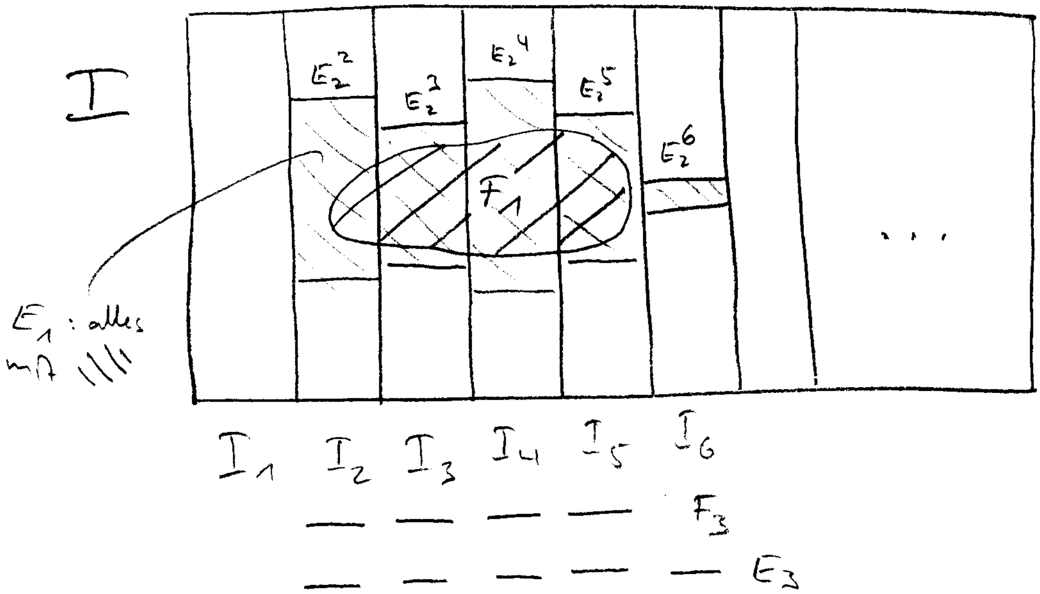
(L1): Für $E_1:=\bigcup_{k\in E_3}E_2^k\subseteq I$ endlich ist $F_1\subseteq E_1\subseteq I$ und $\left|s-\sum_{i\in E_1}a_i\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

(L3): Schlussendlich gilt also:

$$\begin{aligned}
\left|s-\sum_{k\in E_3}s_k\right| &\leq \left|s-\sum_{i\in E_1}a_i\right| + \left|\sum_{i\in E_1}a_i-\sum_{k\in E_3}s_k\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \left|\sum_{k\in E_3}\left(\sum_{i\in E_2^k}a_i - s_k\right)\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k\in E_3}\underbrace{\left|\sum_{i\in E_2^k}a_i-s_k\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2m}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Bildchen zum Beweis von 6.10:



6.11 Korollar (Doppelreihensatz, Satz von Fubini): Sei $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ summierbar. Sei $z_i := \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}$ die i-te Zeilensumme, $s_j := \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij}$ die j-te Spaltensumme, $d_n := \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=n}} a_{ij}$ die n-te Diagonalsumme.

Dann gilt:
$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}} z_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} s_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n$$

Beweis: Spalte $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ auf in

$$\begin{array}{cccccccc} & 11 & 12 & 13 & 14 & \longrightarrow & z_1 \\ d_2 \swarrow & 21 & 22 & 23 & 24 & \longrightarrow & z_2 \\ d_3 \swarrow & 31 & 32 & 33 & 34 & \longrightarrow & z_3 \\ d_4 \swarrow & 41 & 42 & \dots & & & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\ & s_1 & s_2 & s_3 & & & \end{array}$$

Benutze 6.10. □

6.12 Korollar (Satz vom Cauchy-Produkt): Seien $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ absolut summierbar. Dann ist auch $(a_ib_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}$ absolut summierbar und

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}_0} a_i\right)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}_0} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} a_ib_j = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\sum_{\substack{(i,j)\\ i+j=n}} a_ib_j\right)$$

Beweis: Brauchen nur zu zeigen, dass $(a_ib_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}$ absolut summierbar ist, dann folgt die Behauptung mit $z_i = a_i\cdot(\sum b_j)$, $s_j = (\sum a_i)b_j$, $d_n = \sum_{i+j=n} a_ib_j$.
Sei dazu $K := (\sum_i |a_i|)(\sum_j |b_j|) \geq 0$. Zu $G \subseteq \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ wähle $A, B \subseteq \mathbb{N}_0$ endlich, so dass $G \subseteq A\times B \subseteq \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$. Dann $\sum_{(i,j)\in G}|a_ib_j| \leq \sum_{i\in A}|a_i| \sum_{j\in B}|b_j| \leq K$. Dann 6.4(ii). □

6.13 Lemma: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut konvergent.

Beweis: $$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = x \cdot \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$$ für $n \to \infty$, nach dem Quotientenkrit. konvergent. $\square$

6.14 Definition: Für $x \in \mathbb{R}$ definiert $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ die Exponentialfunktion.

6.15 Proposition: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Beweis: Nach 6.12 ist $\exp(x)\exp(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n$ mit

$$d_n = \sum_{\substack{(i,j) \\ i+j=n}} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{n!(n-j)!\,j!} x^{n-j} y^j = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{binomischer Lehrsatz}}}{=} \frac{1}{n!}(x+y)^n$$

$$\Rightarrow \exp(x)\exp(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y). \qquad \square$$

6.16 Bemerkung: Eigenschaften der Exponentialreihe:

(a) Mit $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ gilt $\exp(n) = \exp(1 + \dots + 1) = e^n$ nach 6.15.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) \cdot \exp(-x) \overset{6.15}{=} \exp(0) = 1$, insbesondere $\exp(x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$, denn $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2})\exp(\frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2})^2 > 0$.

(d) Es gilt $\left| \exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \right| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$ falls $|x| \leq \frac{N+2}{2}$