§8 Stetigkeit

8.1 Definition: (a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine (reellwertige) Funktion ist eine Abbildung $f: D \to \mathbb{R}$. Hierbei heißt D der Definitionsbereich.
Der Graph von f ist die Menge $\Gamma = \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$.
Auch andere Definitionsbereiche sind denkbar, nicht nur Teilmengen von $\mathbb{R}$.

(b) Sind f, g Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch

$$f+g: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)+g(x) \end{array}, \quad \lambda f: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda f(x) \end{array}, \quad fg: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)g(x) \end{array}$$

Funktionen auf D. Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch

$$\frac{f}{g}: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$ eine Funktion.

Sind $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: E \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$, so ist

$$g \circ f: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}$$ eine Funktion.

8.2 Bemerkung: Funktionen sind Abbildungen, deren Wertebereich in $\mathbb{R}$ liegt.
Dadurch sind punktweise Operationen wie in 8.1(b) möglich.

8.3 Beispiele: (a) $f(x) \equiv c$ für alle $x \in D$ konstante Funktion ($c \in \mathbb{R}$ fest)

(b) $f(x) = x$ für $x \in D$ identische Funktion

(c) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ Polynomfunktion
erhält man aus (a) und (b) allein mit Operationen aus 8.1(b).

(d) $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für Polynome p, q rationale Funktion, $D \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

(e) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$, existiert nach §4.

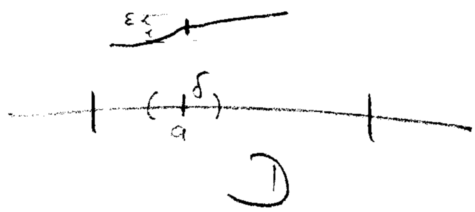
(f) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ kann geschrieben werden als $f = g \circ h$ mit $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2$.

(g) $\exp(x)$ ist auf $D = \mathbb{R}$ definiert nach §6.

(h) $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ charakteristische Funktion. allgemein: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ für $A \subseteq \mathbb{R}$.

8.4 Definition: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$, so dass $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Sei $c \in \mathbb{R}$. Wir schreiben

$\lim_{x \to a} f(x) = c$, falls $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta$: $\ |f(x) - c| < \varepsilon$



8.5 Satz: In obiger Definition gilt $\lim_{x \to a} f(x) = c$ genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_n \to a, n \to \infty$ gilt: $f(x_n) \to c, n \to \infty$

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei $\lim_{x \to a} f(x) = c$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ wenn immer $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ ist. Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|x_n - a| < \delta$ für alle $n \geq N$.
Dann ist $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ für $n \geq N$, d.h. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$.
„$\Leftarrow$" Kontraposition. Sei $\lim_{x \to a} f(x) = c$ nicht gegeben, d.h.
$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ aber $|f(x) - c| \geq \varepsilon$.
Zu jenem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\delta = \frac{1}{n}$ ex. also $x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - c| \geq \varepsilon$. Also gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \to a, n \to \infty$, aber $f(x_n) \not\to c, n \to \infty$. $\square$

8.6 Bemerkung: Im Satz 8.5 ist es wichtig, dass $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to c$ für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ überprüft wird. Beispielsweise ist für $\chi_{\mathbb{Q}}$ wie in 8.3(b) und der Folge $x_n := \frac{1}{n}$ gegeben: $x_n \to 0$ und $\chi_{\mathbb{Q}}(x_n) \equiv 1 \to 1$.
Gilt also $\lim_{x \to 0} \chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$? Nein, denn zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gilt:
$\forall \delta > 0\ \exists x \in D \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ mit $|x - 0| < \delta$ und $|\underbrace{\chi_{\mathbb{Q}}(x)}_{=0} - 1| = 1 \not< \varepsilon$.

8.7 Definition: Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $a, c \in \mathbb{R}$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$. Schreibe

$\lim_{x \to \infty} f(x) = c$ falls: $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \geq K$: $|f(x) - c| < \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ falls: $\quad$ " $\quad$ " $\quad \forall x \leq K$ $\quad$ "

$\lim_{x \nearrow a} f(x) = c$ falls: $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x < a$ mit $|x - a| < \delta$: $|f(x) - c| < \varepsilon$

$\lim_{x \searrow a} f(x) = c$ falls: $\quad$ " $\quad$ " $\quad \forall x > a$ $\quad$ " $\quad$ "

8.8 Beispiel: Für $\chi_{[0,\infty)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, also $\chi_{[0,\infty)}(x) := \begin{cases}1 & x\in[0,\infty)\\ 0 & x\notin[0,\infty)\end{cases}$

ist $\lim_{x\nearrow 0}\chi_{[0,\infty)}(x)=0$ und $\lim_{x\searrow 0}\chi_{[0,\infty)}(x)=1$.

8.9 Definition: Sei $f: D\to\mathbb{R}$ und $a\in D$.

f heißt stetig in a, falls $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

f heißt stetig auf D, falls f stetig in jedem Punkt von D ist.

8.10 Proposition: Sei $f:D\to\mathbb{R}$ und $a\in D$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in a

(ii) für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n\in D$, $x_n\to a$ gilt: $f(x_n)\to f(a)$

(iii) $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D$ mit $|x-a|<\delta$: $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

Beweis: Def. 8.4 und Satz 8.5. □

8.11 Satz: (a) Seien $f,g: D\to\mathbb{R}$ stetig in $a\in D$ und sei $\lambda\in\mathbb{R}$.

Dann sind auch $f+g$, fg, λf stetig in a.

Ist außerdem $g(x)\neq 0$ $\forall x\in D$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a.

(b) Sind $f:D\to\mathbb{R}$ und $g:E\to\mathbb{R}$ stetig und $f(D)\subset E$, so ist auch $g\circ f: D\to\mathbb{R}$ stetig auf D.

Beweis: (a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in D mit $x_n\to a$. Dann sind $f(x_n)\to f(a)$ und $g(x_n)\to g(a)$. Also

$$\left.\begin{aligned}(f+g)(x_n) &= f(x_n)+g(x_n) \to f(a)+g(a) = (f+g)(a)\\ (fg)(x_n) &= f(x_n)g(x_n) \to f(a)g(a) = (fg)(a)\\ (\lambda f)(x_n) &= \lambda f(x_n) \to \lambda f(a) = (\lambda f)(a)\\ \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) &= \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a)\end{aligned}\right\} \text{ nach } §3$$

(b) Sei $x_n\to a$, $x_n\in D$. Dann ist $\underbrace{f(x_n)}_{y_n:=}\to f(a)$, da f stetig und

$g(y_n)\to g(f(a))$, da g stetig. Also $(g\circ f)(x_n)\to(g\circ f)(a)$. □

8.12 Beispiele: (a) $f(x) \equiv c$ konstante Funktion ist stetig auf $D = \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = x$ identische Funktion ist stetig auf $D = \mathbb{R}$

(c) Polynomfunktionen sind stetig nach (a), (b) und 8.11.

(d) Rationale Funktionen sind stetig auf $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

(e) Wurzelfunktionen? Siehe später.

(f) $f(x) = |x|$ ist stetig sofern $\sqrt{\cdot}$ stetig ist, denn $|\cdot| = \sqrt{\cdot} \circ (\cdot)^2$ und 8.11(b)

(g) exp ist stetig auf $\mathbb{R}$: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

1) Stetig in 0: $\exp(0) = 1$. Also

$$|\exp(x) - \exp(0)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \underset{\text{falls } |x|<1}{\leq} |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = \frac{|x|}{1-|x|} \underset{\text{falls } |x| \leq \frac{1}{2}}{\leq} 2|x| \longrightarrow 0 \quad \text{für } x \to 0$$

2) Stetig in $a \in \mathbb{R}$ beliebig:

$$|\exp(a) - \exp(x)| \underset{(x = a+t)}{=} |\exp(a) - \underbrace{\exp(a+t)}_{\exp(a)\exp(t)}|$$

$$= |\exp(a)|\,|1 - \exp(t)| \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \to 0$$

(d.h. für $x \to a$)

(h) $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht stetig und zwar in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$, denn Bemerkung 8.6 gilt nicht nur für $x = 0$, sondern in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.