**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

**Übungen zur Vorlesung Analysis I**
Wintersemester 2010/2011

**Blatt 2**
**Abgabe:** Mittwoch, 3.11. 2010, 17:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

---

**Aufgabe 1** (10 Punkte)**.** Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_n(x) = x^n$ für $n = 0, 1, 2, \dots$

(b) $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{0, 1, 2, \dots, n^2 - 1\}$, definiert durch $f(x) = x^2 - 1$

(c) $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{0, 1, \dots, n - 1\}$, definiert durch $f(x) = x - 1$

**Aufgabe 2** (10 Punkte)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Verneinen Sie die folgenden Aussagen. Benutzen Sie dabei die Definitionen von Injektivität, Surjektivität und Bijektivität der Vorlesung.

(a) $f$ ist injektiv

(b) $f$ ist surjektiv

(c) $f$ ist bijektiv

**Aufgabe 3** (10 Punkte)**.** Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(a) Zeigen Sie:

  (i) Ist $g \circ f : X \to Z$ injektiv, so ist auch $f$ injektiv.
  (ii) Ist $g \circ f : X \to Z$ surjektiv, so ist auch $g$ surjektiv.

(b) Sei nun $Z = X$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Welche der folgenden Aussagen folgen hieraus (Beweis oder Gegenbeispiel):

  (i) $f$ ist injektiv
  (ii) $f$ ist surjektiv
  (iii) $g$ ist injektiv
  (iv) $g$ ist surjektiv

*bitte wenden*

**Aufgabe 4** (10 Punkte)**.** Beweisen Sie:

(a) Sind $M_1, \dots, M_l$ abzählbare Mengen, so ist auch

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_l = \{(m_1, m_2, \dots, m_l) \mid m_i \in M_i \text{ für } 1 \leq i \leq l\}$$

abzählbar. (Tipp: Beweisen Sie die Aussage zunächst für den Fall $l = 2$.)

(b) Sei $\emptyset \neq I$ eine abzählbare Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $M_i$ eine abzählbare Menge. Dann ist auch $\cup_{i \in I} M_i$ abzählbar.

**Aufgabe 5** (10 Punkte)**.** Sei $M$ eine Menge. Die *Potenzmenge* von $M$ definiert man als die Menge aller Teilmengen von $M$:

$$\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$$

Unter anderem sind die leere Menge $\emptyset$ und die Menge $M$ selbst in $\mathcal{P}(M)$. Zeigen Sie:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Potenzmenge einer $n$-elementigen Menge hat $2^n$ Elemente.

(b) Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist überabzählbar. (Hinweis: Betrachten Sie eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ als eine geeignete Folge von Nullen und Einsen und vollziehen Sie den Beweis der Vorlesung, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, nach.)

Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein: Die Potenzmenge einer Menge ist immer echt größer als die Menge selbst.