



Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2010/2011

Blatt 3

Abgabe: Mittwoch, 10.11. 2010, 17:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K$.

(a) Beweisen Sie die inverse Dreiecksungleichung:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

(b) Seien $a > 0$ und $b > 0$. Zeigen Sie folgende Ungleichung:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

Aufgabe 2 (10 Punkte). Für positive Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man das *arithmetische*, das *geometrische* und das *harmonische Mittel* durch

$$A(a, b) = \frac{a + b}{2}, \quad G(a, b) = \sqrt{ab}, \quad H(a, b) = \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a + b}$$

Beweisen Sie: Für alle $a, b > 0$ gilt $H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$, und Gleichheit der Mittel gilt genau dann, wenn $a = b$.

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a = 0$.

(b) Gilt die Aussage in (a) auch noch, wenn $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ nicht für alle, aber für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt?

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei A eine n -elementige Menge und B eine m -elementige (wobei $m, n \in \mathbb{N}$ sind).

- (a) Bestimmen Sie die Anzahl aller Abbildungen von A nach B .
- (b) Bestimmen Sie die Anzahl aller injektiven Abbildungen von A nach B .
- (c) Bestimmen Sie die Anzahl aller bijektiven Abbildungen von A nach B .

Aufgabe 5 (10 Punkte). Welche der folgenden Mengen sind abzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a) die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$
- (b) die Menge aller 2×2 -Matrizen mit rationalen Matrixelementen
- (c) die Menge aller Abbildungen $f : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$
- (d) die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$