UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2010/2011

Blatt 5
Abgabe: Mittwoch, 24.11. 2010, 17:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie: Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt entweder eine konvergente Teilfolge oder eine, die bestimmt gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$ divergiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Auf Blatt 3 wurde das *arithmetische*, das *geometrische* und das *harmonische Mittel* für positive Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definiert. Seien nun $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 < a < b$. Wir definieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 := a$, $b_1 := b$ sowie $a_{n+1} := H(a_n, b_n)$ und $b_{n+1} := A(a_n, b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Alle Zahlen a_n, b_n sind rational.

(b) Ist $I_n = [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so bildet $(I_n)_n$ eine Intervallschachtelung, dh. für alle n ist $I_n \supset I_{n+1}$ und $|I_n| \to 0$ für $n \to \infty$.

(c) Für den Schnitt über alle Intervalle I_n gilt: $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\sqrt{ab}\}$

(d) Finden Sie mit Hilfe der obigen Konstruktion eine rationale Zahl x mit $|\sqrt{2} - x| < 10^{-3}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Geben Sie jeweils Beispiele von Folgen reeller Zahlen (a_n) und (b_n) an mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, so dass die folgenden Fälle eintreten:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = c$ wobei c eine beliebige vorgegebene reelle Zahl ist.

(d) Die Folge $(a_n b_n)$ ist beschränkt, konvergiert aber nicht.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte). *(Banachscher Fixpunktsatz)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass ein $0 \leq q < 1$ existiert mit $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ (x heißt dann *Fixpunkt* von f.) Verfahren Sie hierzu wie folgt:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass f höchstens einen Fixpunkt besitzt.

(b) Wählen Sie ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ und definieren Sie rekursiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_1 := f(x_0)$ und $x_{n+1} := f(x_n)$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|x_{n+1} - x_n| \leq q^n|x_1 - x_0|$.

(c) Folgern Sie aus (b), dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie dann, dass $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ein Fixpunkt von f ist.

Aufgabe 5 (10 Punkte). Von einem Liter Wein gießt man 1/4 Liter weg und ersetzt den weggegossenen Teil durch Wasser. Von der Mischung gießt man wiederum 1/4 Liter weg und ersetzt den weggegossenen Teil durch Wein. Dieser aus zwei Schritten bestehende Prozess wird beliebig oft wiederholt. Welches Mischungsverhältnis ergibt sich im Grenzwert? Existiert der Grenzwert überhaupt? Ersetzen Sie nun 1/4 durch ein q mit $0 < q < 1$. Wie ist der Sachverhalt hier?

Zusatzaufgabe* (10 Punkte). Die Folge (a_n) sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_1 := 0, a_2 := 1, a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \text{ für } n \geq 3$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Der Termin für die *Zwischenklausur* wurde wegen einer Überschneidung geändert. Sie findet jetzt am **Mittwoch, dem 15.12.2010 von 9:00 bis 12:00 Uhr im AudiMO** statt. Die Teilnahme an der Zwischenklausur ist freiwillig, allerdings kann die Note zu 20% auf die Note des Scheins angerechnet werden, falls sie besser ist als die Note der Hauptklausur – siehe dazu das ***Infoblatt "Klausurtermine"***.
Die *Hauptklausur* findet unverändert am **Montag, dem 28.2.2011** statt. Der Raum und die Uhrzeit werden noch bekannt gegeben.