UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2010/2011

Blatt 6
Abgabe: Mittwoch, 1.12.2010, 17:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz (beweisen Sie Ihre Aussagen):

(a) $a_n = \frac{1}{n^k}$ für $k \in \mathbb{N}$ fest

(b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $a_n = \frac{n^{1000}}{(1+\varepsilon)^n}$ mit $\varepsilon > 0$ fest

(d) $a_n = \frac{z^n}{n}$ mit $z \in \mathbb{R}$ fest

(e) $a_n = \frac{n}{n-1}$

Welche der Reihen sind absolut konvergent?

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Eine (unsterbliche) punktförmige Schnecke kriecht auf einem zunächst 1 km langen Gummiseil jede Nacht um 1 cm auf einen unter einer Schneckophobie leidenden, ebenfalls unsterblichen Mathematiker zu, der das Seilende hält und das Seil am folgenden Tag um einen Kilometer dehnt.
Vorausgesetzt, das Seil lässt sich beliebig oft um 1 km dehnen – erreicht dann die Schnecke je den Mathematiker?

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Werte:

(a) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$

(b) $a_n = (\frac{2}{3})^n$

Sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergent? (Den Wert brauchen Sie nicht zu berechnen.)

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Finden Sie eine Funktion $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}; (n,m) \mapsto a_{n,m}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \right) \neq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} \right),$$

wo aber beide Doppelsummen konvergieren. Ist a über $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ summierbar?

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei S der Wert der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} S$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} S$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{2} S$