UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Wintersemester 2010/2011

Blatt 7

Abgabe: Mittwoch, 8.12.2010, 17:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob folgende Reihen konvergieren. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ wobei $x \geq 0$ eine reelle Zahl ist.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

(Hinweis zu (b): Benutzen Sie die Aussagen von Aufgabe 4.)

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass folgende Familien summierbar sind und berechnen Sie deren Summe. (Hierbei ist $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.)

(a) $a_{ij} = \dfrac{1}{2^i 3^j}$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$

(b) $a_{ij} = \dfrac{1}{i! 3^j}$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$

(c) $a_{ik} = \dbinom{k}{i} x^i y^{k-i}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq i \leq k$ wobei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x|, |y| < \dfrac{1}{2}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Familie $(a_{kj})_{j,k=2,3,4,\ldots}$, gegeben durch $a_{kj} = \frac{1}{j^k}$, summierbar ist und berechnen Sie den Wert der Doppelreihe:

$$\sum_{j,k=2}^{\infty} \frac{1}{j^k}$$

(Hinweis: Benutzen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$)

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Die Zahl $e \in \mathbb{R}$ sei als $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ definiert. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert und dass er die Zahl e ist. (Hinweis: Zeigen Sie $(1 + \frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ und $e^{\frac{1}{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$ unter Benutzung von $e^{\frac{1}{n+1}} = \exp(\frac{1}{n+1})$)

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Limes superior und den Limes inferior.

(a) $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

(b) $a_n := (-1)^n \sqrt[n]{n}$

(c) $a_n := \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Berechnen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $a_n := f(n)$. Geben Sie auch $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ an.