



Übungen zur Vorlesung Analysis I  
Wintersemester 2010/2011

Blatt 8

Abgabe: Mittwoch, 5.1.2011, 17:00 Uhr  
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

---

**Aufgabe 1** (10 Punkte). Seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{Q}$ . Zeigen Sie: Dann gilt auch  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 2** (10 Punkte). Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(x_0) > 0$  in einem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass dann  $a, b \in \mathbb{R}$  existieren mit  $a < x_0 < b$ , so dass  $f(x) > 0$  für alle  $x$  im Intervall  $(a, b)$ .

**Aufgabe 3** (10 Punkte). Auf der Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  definieren wir die Addition zweier Elemente wie folgt:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Sei nun  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit Werten in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , definiert durch:

$$w_1 := (-7, 0), \quad w_{n+1} := \begin{cases} w_n + (2, 2b_n) & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ w_n + (-(b_n)^2, 0) & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Hierbei ist die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen definiert durch:

$$b_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n < 12 \\ 0 & \text{falls } n = 12 \\ -1 & \text{falls } n > 12 \end{cases}$$

Berechnen Sie die ersten 24 Werte von  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und tragen Sie sie in ein Koordinatensystem ein.

**Zusatzaufgabe\*** (10 Punkte). Verbinden Sie die Punkte  $w_n$  und  $w_{n+1}$  aus der obigen Aufgabe für alle  $n = 1, \dots, 23$  durch gerade Linien (ebenso die Punkte  $w_{24}$  und  $w_1$ ) und färben Sie die umschlossene Fläche in einer Ihnen geeignet erscheinenden Farbe. Verzieren Sie das Objekt wohlwollend und summen bzw. brummen Sie dabei Ihr Lieblingsweihnachtslied. Vergessen Sie nicht, von Zeit zu Zeit "hohoho" auszurufen.