UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2010/2011

Blatt 9
Abgabe: Mittwoch, 12.1.2011, 17:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie: Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ besitzt einen Fixpunkt $x \in [a, b]$. (dh. $f(x) = x$). (Hinweis: Zwischenwertsatz)

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L \geq 0$ existiert mit $|f(z) - f(w)| \leq L|z - w|$ für alle $z, w \in D$.
Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion auch gleichmäßig stetig ist. Zeigen Sie dann, dass die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}; f(x) = \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass keine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) = \frac{1}{x}$ für $0 < x \leq 1$. (Mit anderen Worten: Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig fortsetzbar.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Bringen Sie die unten aufgeführten Ausdrücke auf die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $(2 + i) \cdot (3 + i)$

(b) $\frac{1}{i}$

(c) $\frac{3+i}{4-i}$

(d) $\frac{(2+5i)(3-7i)}{1+3i}$

(Hinweis: binomische Formel)

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Zeichnen Sie die folgenden Punktmengen.

(a) $M_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - i| = |z + i|\right\}$

(b) $M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < |z - 1| < 2\right\}$

(c) $M_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \leq 1, \mathrm{Re} z \geq 0, |\mathrm{Im} z| \leq \frac{1}{2}\right\}$