UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2010/2011

Blatt 10
Abgabe: Mittwoch, 19.1.2011, 17:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (20 Punkte!). Wir definieren die *Tangensfunktion* $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ durch $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(a) Zeigen Sie: $\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ und $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$

(b) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.

(c) Die nach (b) existierende Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ heißt die *Arcustangens-Funktion*. Berechnen Sie $\arctan(1)$ und $\arctan(-1)$ und fertigen Sie eine (grobe) Skizze des Graphen von arctan.

(d) Zeigen Sie für die Ableitungen des Tangens und des Arcustangens:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x), \qquad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in D n-mal stetig differenzierbare Funktionen. Man beweise durch vollständige Induktion nach n die folgende Beziehung (nach Leibniz):

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}(x)$$

bitte wenden

Aufgabe 3 (20 Punkte!). Der *Cosinus-Hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der *Sinus-Hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ werden definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Zeigen Sie:

(a) $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig und für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten $\cosh(-x) = \cosh(x)$ und $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

(b) Beweisen Sie die Additionstheoreme für sinh und cosh (für $x, y \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
&\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)\\
&\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)\\
&\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.
\end{aligned}$$

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(d) Zeigen Sie, dass für die Ableitungen gilt:

$$\sinh'(x) = \cosh(x), \qquad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

(Der Sinus-Hyperbolicus und der Cosinus-Hyperbolicus sind übrigens sehr "realitätsnahe" Funktionen. Die Gestalt eines an zwei Enden aufgehängten Seiles wird nämlich nicht, wie vielfach irrtümlich angenommen, von einer quadratischen Funktion beschrieben, sondern vom Cosinus-Hyperbolicus. Sein Graph wird daher auch "Kettenlinie" genannt.)