UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Dipl.-Math. Moritz Weber

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2010/2011

Blatt 11
Abgabe: Mittwoch, 26.1.2011, 17:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \exp(\sin(x)\cos(x))$

(b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}; f(x) = x^x$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \cos(\exp(x^2))\ln(x^2 + 1)$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = \dfrac{\cos(x)}{e^x(x^2 + 1)}$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}; f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{Bmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung $f' : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.

(b) Untersuchen Sie die Ableitung $f' : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

(c) Beweisen Sie, dass f unendlich viele lokale Minima und Maxima besitzt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Seien $0 < a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie dabei alle Rechenschritte:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Untersuchen Sie direkt, also mit Hilfe des Grenzwerts der Differenzenquotienten, die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ auf Differenzierbarbeit, und berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ in allen Punkten $x \in [0, \infty)$ in denen Differenzierbarkeit vorliegt.

Aufgabe 5 ($10 + 5^*$ Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine überall differenzierbare Funktion mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f'(x_0) = 0$.

(b)* Existiert zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = a$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist, mit $f(0) = 0$ und monoton wachsender Ableitung f'. Zeigen Sie, dass die auf $(0, \infty)$ definierte Funktion $\frac{f(x)}{x}$ monoton wachsend ist.