



Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2010/2011

Blatt 12

Abgabe: Mittwoch, 2.2.2011, 17:00 Uhr
in den Briefkästen vor dem Sekretariat von Frau Voss, Gebäude E2 4

Dies ist das letzte Übungsblatt für dieses Semester.

Aufgabe 1 (10 Punkte). Fassen Sie die folgenden Ausdrücke als Riemannsche Summen auf und berechnen Sie ihre Grenzwerte für $n \rightarrow \infty$.

- (a) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\cos(\frac{k}{n})}{1 + \sin(\frac{k}{n})}$
- (b) $\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$

Aufgabe 2 (10 Punkte). Seien $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte). Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

- (a) $\int \sin^2 t e^{-t} dt$
- (b) $\int \frac{1}{1 + \cos t} dt$ (Tipp: $\frac{\sin t}{1 + \cos t} = u$)
- (c) $\int \sinh t \cos t dt$
- (d) $\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$ (Tipp: $t^2 + 1 = u$)
- (e) $\int \frac{1}{\sqrt{1 + e^t}} dt$

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Zeigen Sie, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx < \varepsilon$$

Aufgabe 5 (10 Punkte). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (a) Zeigen Sie, dass f eine Regelfunktion ist, falls f monoton wachsend ist auf $[a, b]$.
- (b) Ist f auch dann schon eine Regelfunktion, wenn f nur auf (a, b) als monoton wachsend vorausgesetzt wird? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Zusatzaufgabe* (10 Punkte). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, reelle Funktion mit der Eigenschaft, dass für alle $x, y \in (a, b)$ und alle $\alpha \in [0, 1]$ gilt:

$$h((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)h(x) + \alpha h(y)$$

Zeigen Sie, dass dann für alle stetigen Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow (a, b)$ gilt:

$$h\left(\int_0^1 f(x) \, dx\right) \leq \int_0^1 (h \circ f)(x) \, dx$$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte). Geben Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die $f(x) = f(f(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen. (mit Beweis)

Hinweis: Laut Auskunft des Prüfungsamtes sollten Sie sich bald für die Bachelorprüfung (sofern der Bachelor Ihr Studienziel ist) angemeldet haben, nämlich noch vor der Anmeldung zur ersten Klausur Ihres Studiums. Die Anmeldung können Sie einfach beim Prüfungsamt vornehmen.