UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2015/2016

Blatt 2
Abgabe: Mittwoch, 4.11.2015, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach n:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $1 \neq x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \text{(Geometrische Summe)}$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $7^{n+1} + 8^{2n-1}$ durch 57 teilbar.
Hinweis: $8^2 = 57 + 7$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Identitäten von Mengen:

(a) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$

(b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(c) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_n(x) = x^n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

(b) $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1, 2, \ldots, n^2 - 1\}$, definiert durch $f(x) = x^2 - 1$

(c) $f : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n + 1\}$, definiert durch $f(x) = x + 1$

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen.

(a) Zeigen Sie:

  (i) Ist $g \circ f : X \to Z$ injektiv, so ist auch f injektiv.

  (ii) Ist $g \circ f : X \to Z$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(b) Sei nun $Z = X$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Welche der folgenden Aussagen folgen hieraus? (Beweis oder Gegenbeispiel)

  (i) f ist injektiv

  (ii) f ist surjektiv

  (iii) g ist injektiv

  (iv) g ist surjektiv

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei M eine Menge. Die *Potenzmenge* von M definiert man als die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$$

Unter anderem sind die leere Menge $\emptyset$ und die Menge M selbst in $\mathcal{P}(M)$. Zeigen Sie:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge hat 2^n Elemente.

(b) Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist überabzählbar.

Hinweis: Betrachten Sie eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ als eine geeignete Folge von Nullen und Einsen und vollziehen Sie den Beweis der Vorlesung, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, nach.

(Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein: Die Potenzmenge einer Menge ist immer echt größer als die Menge selbst.)