UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 3

Abgabe: Mittwoch, 11.11.2015, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie:

(a) Sind $M_1, \dots, M_l$ abzählbare Mengen, so ist auch

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_l = \{(m_1, m_2, \dots, m_l) \mid m_i \in M_i \text{ für } 1 \leq i \leq l\}$$

abzählbar.

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst für den Fall $l = 2$.

(b) Sei $\emptyset \neq I$ eine abzählbare Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei M_i eine abzählbare Menge. Dann ist auch

$$\bigcup_{i \in I} M_i$$

abzählbar.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K$.

(a) Beweisen Sie die *inverse Dreiecksungleichung*:

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$$

(b) Seien $a > 0$ und $b > 0$. Zeigen Sie folgende Ungleichung:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a + b$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a = 0$.

(b) Gilt die Aussage in (a) auch dann noch, wenn $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ nicht mehr für alle, aber noch für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt?

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden Folgen konvergieren, und bestimmen Sie deren Grenzwerte für $n \to \infty$.

(a) $$a_n = \frac{2n^2}{n^2 + 3n + 1}$$

(b) $$b_n = \frac{4 \cdot 7^n - 3 \cdot 7^{2n}}{2 \cdot 7^{n-1} + 5 \cdot 7^{2n-1}}$$

(c) $$c_n = \frac{n^{42} + 23n^7 + 2n^4 + 6}{((n+1)^2 + 5)^{21}}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der arithmetischen Mittel

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

Man nennt diese Konvergenz im arithmetischen Mittel auch *Césaro-Konvergenz.*

(b) Kann man umgekehrt aus der Konvergenz der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Teil (a) auf die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schließen? Begründen Sie Ihre Antwort.