UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2015/2016

Blatt 4
Abgabe: Mittwoch, 18.11.2015, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben ist durch

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Von einem Liter Wein gießt man 1/4 Liter weg und ersetzt den weggegossenen Teil durch Wasser. Von der Mischung gießt man wiederum 1/4 Liter weg und ersetzt den weggegossenen Teil durch Wein. Dieser aus zwei Schritten bestehende Prozess wird beliebig oft wiederholt.

(a) Welches Mischungsverhältnis ergibt sich im Grenzwert? Existiert der Grenzwert überhaupt?

(b) Ersetzen Sie nun 1/4 durch ein q mit $0 < q < 1$. Wie ist der Sachverhalt hier?

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Geben Sie jeweils Beispiele von Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

so dass die folgenden Fälle eintreten:

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = c$, wobei c eine beliebige vorgegebene reelle Zahl ist.

(d) Die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, konvergiert aber nicht.

bitte wenden

Im Folgenden bezeichnen wir für positives $a \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{a}$ die Quadratwurzel von a, d.h. die eindeutig bestimmte postive Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^2 = a$. Dass es in $\mathbb{R}$ immer eine positive Lösung x dieser Gleichung gibt und dass diese tatsächlich eindeutig bestimmt ist, wird zu einem späteren Zeitpunkt in der Vorlesung bewiesen werden.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Für positive Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definiert man das *arithmetische*, das *geometrische* und das *harmonische Mittel* durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \qquad G(a,b) := \sqrt{ab} \qquad \text{und} \qquad H(a,b) := \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Beweisen Sie: Für alle $a, b > 0$ gilt

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b),$$

und Gleichheit der Mittel gilt genau dann, wenn $a = b$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** In Aufgabe 4 haben wir das arithmetische Mittel $A(a,b)$, das geometrische Mittel $G(a,b)$ und das harmonische Mittel $H(a,b)$ für positive Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ eingeführt.
Seien nun $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 < a < b$ gegeben. Wir definieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 := a$, $b_1 := b$ sowie

$$a_{n+1} := H(a_n, b_n) \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} := A(a_n, b_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

(a) Alle Zahlen a_n, b_n sind rational.

(b) Ist $I_n = [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so bildet $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $I_n \supset I_{n+1}$ und es gilt $|I_n| \to 0$ für $n \to \infty$.

(c) Für den Schnitt über alle Intervalle I_n gilt: $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \left\{\sqrt{ab}\right\}$

(d) Finden Sie mit Hilfe der obigen Konstruktion eine rationale Zahl x mit der Eigenschaft $|\sqrt{2} - x| < 10^{-3}$.