UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2015/2016

Blatt 5
Abgabe: Mittwoch, 25.11.2015, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Die *Fibonacci-Zahlen* f_n, $n \geq 0$, sind definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+1} := f_n + f_{n-1}$ für $n \geq 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $a_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$.
Ferner sei g der *goldene Schnitt*, d.h. g ist die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $g^2 = 1 + g$.

(a) Zeigen Sie: $\quad g = 1 + \frac{1}{g} \quad$ und $\quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$|a_n - g| = \frac{1}{f_n g^n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Zeigen Sie: $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = g$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** *(Banachscher Fixpunktsatz)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass ein $0 \leq q < 1$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq q\,|x - y| \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. (x heißt dann *Fixpunkt* von f)

Verfahren Sie hierzu wie folgt:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass f höchstens einen Fixpunkt besitzt.

(b) Wählen Sie ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ und definieren Sie rekursiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $x_n := f(x_{n-1})$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n\,|x_1 - x_0|.$$

(c) Folgern Sie aus (b), dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Zeigen Sie dann, dass $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ein Fixpunkt von f ist.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei bekannt, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Konvergiert dann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie: Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt entweder eine konvergente Teilfolge oder eine, die bestimmt gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ divergiert.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben ist durch

$$a_n := \sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Informationen

- Die *Zwischenklausur* findet in der letzten Woche vor den Weihnachtsferien statt. Der genaue Termin wird noch ermittelt und in der Vorlesung und auf der Homepage bekannt gegeben.
- Falls Sie sich noch nicht für die Bachelorprüfung beim Prüfungsamt

  http://www.ps-ntf.uni-saarland.de/index.php?id=35

  angemeldet haben, sollten Sie das in den nächsten Tagen tun. Dazu müssen Sie **Frau Kihm** in Raum 202 des Gebäudes E1 3, 2. Stock aufsuchen. Ihre Sprechzeiten sind *montags bis donnerstags, 10:30 Uhr bis 11:30 Uhr*. (Telefon: +49 (0)681 / 302-2910, E-Mail: mathematik@ps-ntf.uni-saarland.de)

  Für die Klausuren (außer der Zwischenklausur) müssen Sie sich dann jeweils (!) über das HISPOS anmelden, sobald die Veranstaltung freigeschaltet ist. Das sollte demnächst der Fall sein; wir werden Sie dann informieren.