UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 6

Abgabe: Mittwoch, 2.12.2015, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz. (Beweisen Sie Ihre Aussagen!)

(i) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$

(ii) $a_n = \dfrac{n^{42}}{(1+\varepsilon)^n}$ mit $\varepsilon > 0$ fest

(iii) $a_n = \dfrac{z^n}{3n+1}$ mit $z \in \mathbb{R}$ fest

(iv) $a_n = z^{2n+(-1)^n}$ mit $0 < |z| < 1$ fest

Welche dieser Reihen sind absolut konvergent?

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \Big)$$

absolut konvergiert, und bestimmen Sie ihren Wert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgende Variante des Quotientenkriteriums:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit positiven Gliedern (d.h. es ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte weiter die folgende Aussage:

$$\exists d > 1,\ n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{d}{n}$$

Dann ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

Hinweis: Betrachten Sie $\sum_{n=n_0}^{N} (b_n - b_{n+1})$ für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben ist durch $b_n := (n-1)a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Eine (unsterbliche) punktförmige Schnecke kriecht auf einem zunächst 1 km langen Gummiseil jede Nacht um 5 cm auf einen unter einer Schneckophobie leidenden, ebenfalls unsterblichen Mathematiker zu, der das Seilende hält und das Seil am folgenden Tag um einen Kilometer dehnt.
Vorausgesetzt, das Seil lässt sich beliebig oft um 1 km dehnen – erreicht dann die Schnecke je den Mathematiker?

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**

(a) Wir betrachten die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben sind durch

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{und} \qquad b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist und dass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folgern Sie, dass beide Folgen konvergent sind und den gleichen Grenzwert besitzen. Wir setzen im Folgenden

$$e := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Begründen Sie anschließend, dass $a_n < e < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergent ist mit $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $\left(a_N - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Finden Sie eine Funktion

$$a:\ \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \ (n,m) \mapsto a_{n,m},$$

so dass die beiden Doppelsummen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right) \qquad \text{und} \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}\right)$$

konvergieren, ihre Werte aber *verschieden* sind.