UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2015/2016

Blatt 7
Abgabe: Mittwoch, 9.12.2015, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die folgende Familien summierbar sind, und berechnen Sie deren Summe. (Hierbei ist $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.)

(a) $a_{ij} = \dfrac{1}{3^i 4^j}$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$

(b) $a_{ij} = \dfrac{1}{i! 2^j}$ für $i, j \in \mathbb{N}_0$

(c) $a_{ij} = \dbinom{j}{i} x^i y^{j-i}$ für $j \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq i \leq j$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$, $|x|, |y| < \frac{1}{2}$ fest)

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Wir betrachten die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die gegeben sind durch

$$a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{und} \qquad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent sind, aber die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

(a) Gegeben sei $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

absolut konvergent sind. Ihre Werte bezeichnen wir mit $\cos(x)$ und $\sin(x)$, d.h.

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{und} \qquad \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

bitte wenden

(b) Zeigen Sie durch Multiplikation von Reihen, dass für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

(Analog könnte man auch die Gleichung $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)$ beweisen.)

(c) Folgern Sie, dass $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Für jede (rationale) Zahl $s > 1$ definieren wir die *Riemannsche Zeta-Funktion* ζ durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(a) Beweisen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für (rationales) $s > 1$ absolut konvergiert.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \big(\zeta(k) - 1\big)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Familie $(n^{-k})_{n,k\geq 2}$ und benutzen Sie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Es sei $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} = (2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots)$ die Folge der Primzahlen. Für $N \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit J_N die Menge aller natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren zu $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ gehören.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes (rationale) $s > 1$ und jedes $N \in \mathbb{N}$ die Familie $(n^{-s})_{n\in J_N}$ summierbar ist mit der Summe

$$\sum_{n\in J_N} \frac{1}{n^s} = P_N := \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe für $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$.

(b) Folgern Sie die *Eulersche Produktdarstellung* für $\zeta(s)$ aus Aufgabe 4,

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} := \lim_{N\to\infty} P_N \qquad \text{für jedes (rationale) } s > 1.$$

(Hierbei ist $\prod_{k=1}^{N} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdots a_{N-1} \cdot a_N$ für $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$.)