UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis I

Wintersemester 2015/2016

Blatt 8

Abgabe: Mittwoch, 6.1.2016, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie für die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils den Limes superior und den Limes inferior.

(a) $$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(b) $$a_n := (-1)^n \sqrt[n]{n}$$

(c) $$a_n := \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$f(x) = g(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie, dass dann bereits $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten muss.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte $f(x_0) > 0$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit $a < x_0 < b$, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie: Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ besitzt einen *Fixpunkt*, d.h. es gibt ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.

Hinweis: Zwischenwertsatz

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Auf der Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ definieren wir die Addition zweier Elemente wie folgt:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Sei nun $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, die rekursiv definiert ist durch

$$w_1 := (-7, 0) \qquad \text{und} \qquad w_{n+1} := \begin{cases} w_n + (2, 2b_n), & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ w_n + (-(b_n)^2, 0), & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases},$$

wobei die reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben ist durch

$$b_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } n < 12 \\ 0, & \text{falls } n = 12 \\ -1, & \text{falls } n > 12 \end{cases}.$$

Berechnen Sie die ersten 24 Werte von $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und tragen Sie diese in ein Koordinatensystem ein.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Verbinden Sie für $n = 1, \ldots, 23$ die Punkte w_n und w_{n+1} aus der obigen Aufgabe 5 (ebenso die Punkte w_{24} und w_1) und färben Sie die umschlossene Fläche in einer Ihnen geeignet erscheinenden Farbe. Verzieren Sie das Objekt wohlwollend und summen bzw. brummen Sie dabei Ihr Lieblingsweihnachtslied. Vergessen Sie nicht, von Zeit zu Zeit "hohoho" auszurufen.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ geben kann mit $f(x) = \frac{1}{x}$ für alle $0 < x \leq 1$.
(Mit anderen Worten: Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig fortsetzbar.)

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht gleichmäßig stetig.

(b) Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \quad \text{für alle für alle } x, y \in I.$$

Zeigen Sie:

(a) Jede Lipschitz-stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist auch gleichmäßig stetig.

(b) Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

****

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins Jahr 2016!