UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2015/2016

Blatt 9
Abgabe: Mittwoch, 13.1.2016, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** In Definition 12.2 der Vorlesung wurden die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ definiert durch $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) |\ x,y \in \mathbb{R}\}$ und versehen mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned}(x_1,y_1) + (x_2,y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2),\\ (x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

Ferner haben wir in 12.4 auf $\mathbb{C}$ die komplexe Konjugation $\overline{(x,y)} := (x,-y)$ eingeführt.

Verifizieren Sie, dass in $(\mathbb{C},+,\cdot)$ die folgenden Rechenregeln gelten:

(a) Es gilt das *Assoziativgesetz der Multiplikation*, d.h. für $z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$ ist

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3.$$

(b) Es gilt das *Distributivgesetz*, d.h. für $z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$ ist

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

(c) Zu jedem $z \in \mathbb{C}\backslash\{(0,0)\}$ existiert ein *multiplikativ Inverses*, d.h. es gibt ein Element $z^{-1} \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $z^{-1} \cdot z = z \cdot z^{-1} = (1,0)$.

(d) Die komplexe Konjugation erfüllt $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ für alle $z_1,z_2 \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Bringen Sie die nachfolgend aufgeführten Ausdrücke auf die Form $x + iy$ mit $x,y \in \mathbb{R}$:

(a) $(1+2i)\cdot(3-i)$

(b) $\dfrac{2}{i^3}$

(c) $\dfrac{1+i}{1-i}$

(d) $\dfrac{(3+2i)(7-3i)}{2+4i}$

Hinweis: Verwenden Sie die binomischen Formeln.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeichnen Sie die folgenden Punktmengen.

(a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = |z + z_0|\}$, wobei $z_0 := 1 - i$

(b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z - i| < 3\}$

(c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1, \operatorname{Im}(z) > 0, |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathbb{T}$ den *Einheitskreis in* $\mathbb{C}$, d.h. es ist $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$.

(a) Wir betrachten die Funktion

$$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \; x \mapsto \frac{2x}{x^2+1} + i\,\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Zeigen Sie, dass σ stetig und injektiv ist mit dem Bild $\sigma(\mathbb{R}) = \mathbb{T} \backslash \{i\}$. Bestimmen Sie anschließend die Umkehrfunktion $\sigma^{-1} : \mathbb{T} \backslash \{i\} \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass diese ebenfalls stetig ist.

(b) Beweisen Sie, dass es keine bijektive stetige Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{T}$ eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ auf den Einheitskreis $\mathbb{T}$ geben kann.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle sechs Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^6 = -64$$

und stellen Sie diese in der komplexen Zahlenebene (vgl. Bemerkung 12.3) graphisch dar.