UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2015/2016

Blatt 10
Abgabe: Mittwoch, 20.1.2016, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (20 Punkte!). Wir definieren die *Tangensfunktion* $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ durch

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \text{für } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

(a) Zeigen Sie: $\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ und $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$

(b) Zeigen Sie, dass $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bijektiv ist.

(c) Die nach (b) existierende Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ heißt die *Arcustangens-Funktion*. Berechnen Sie $\arctan(1)$ und $\arctan(-1)$ und fertigen Sie eine (grobe) Skizze des Graphen von arctan an.

(d) Zeigen Sie, dass für die Ableitungen des Tangens und des Arcustangens

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \qquad \text{und} \qquad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $y \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Untersuchen Sie die Funktion

$$f: \ [0,\infty) \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{x}.$$

auf Differenzierbarkeit, und berechnen Sie die Ableitung $f'(x)$ in allen Punkten $x \in [0,\infty)$, in denen Differenzierbarkeit vorliegt.

Tun Sie dies ...

(a) ... sowohl direkt, d.h. mit Hilfe des Grenzwerts des Differenzenquotienten,

(b) ... als auch unter Verwendung von Satz 14.11.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wie betrachten die Funktion

$$f: \; [-1,1] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f differenzierbar ist, und berechnen Sie auch ihre Ableitung $f' : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

(b) Untersuchen Sie die Ableitung $f' : [-1,1] \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

Aufgabe 4 (10 Punkte + 10 Zusatzpunkte*)**.**

(a) Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in D n-mal stetig differenzierbare Funktionen. Man beweise durch vollständige Induktion nach n die folgende Formel (*Leibnizsche Regel*) für die n-te Ableitung $(f \cdot g)^{(n)}$ der Produktfunktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

(b)* Wir betrachten zwei Funktionen $f : D_2 \to \mathbb{R}$ und $g : D_1 \to \mathbb{R}$ mit $g(D_1) \subseteq D_2$, die auf ihren Definitionsbereichen D_1 bzw. D_2 jeweils n-mal differenzierbar sind. Finden und beweisen Sie eine Formel, die die n-te Ableitung $(f \circ g)^{(n)}$ der Komposition $f \circ g : D_1 \to \mathbb{R}, x \mapsto f(g(x))$ durch die Ableitungen von f und g ausdrückt.