UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis I
Wintersemester 2015/2016

Blatt 11
Abgabe: Mittwoch, 27.1.2016, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$f_1 : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^a \qquad \text{(für } a \in \mathbb{R} \text{ fest)}$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto b^x \qquad \text{(für } b > 0 \text{ fest)}$$
$$f_3 : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$$

(b) Wir vereinbaren nun $0^0 := 1$ und setzen damit die Funktion $f_3 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ aus Aufgabenteil (a) zu einer Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fort, d.h. wir haben

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^x, & \text{falls } x > 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

(i) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x = 0$.

(ii) Bestimmen Sie alle maximalen Teilintervalle $I \subseteq [0,\infty)$, auf denen f streng monoton wachsend bzw. fallend ist.

(iii) Bestimmen Sie das Bild $f([0,\infty)) = \{f(x) |\ x \in [0,\infty)\}$ von f.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie dabei alle Rechenschritte:

(a) $$\lim_{x\to a} \frac{x^5 - a^5}{x^3 - a^3}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{b^{\frac{1}{n}} - 1}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{\sin(bx)}$$

(d) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$$

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine überall differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

(a) Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f'(x_0) = 0$.

(b) Existiert allgemeiner zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = a$?
(Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Gegeben sei $C > 0$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$Ce^x = 28 + x^4$$

genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \|f'\|_{[a,b]}\,|x_1 - x_2| \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in [a, b].$$

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.**

(a) Geben Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die die Bedingung

$$f(x) = f(f(x)) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllen.

(b) Wie ändert sich die Situation, wenn wir in (a) die Forderung „differenzierbar“ zu „stetig“ abschwächen?

Informationen

Für die Klausuren müssen Sie sich jeweils (!) über das HISPOS-System (LSF) anmelden:

https://www.lsf.uni-saarland.de

Die Vorlesung Analysis I ist dort inzwischen freigeschaltet. Bitte beachten Sie die entsprechenden Anmeldefristen.