**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

# Übungen zur Vorlesung Analysis I

Wintersemester 2015/2016

## Blatt 12

**Abgabe:** Mittwoch, 3.2.2016, 10:15 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

---

*Hinweis: Dies ist das letzte bewertete Übungsblatt für dieses Semester!*

**Aufgabe 1** (10 Punkte)**.** Fassen Sie die folgenden Ausdrücke als Riemannsche Summen auf und berechnen Sie damit ihre Grenzwerte für $n \to \infty$.

(a) $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(\frac{k}{n})}{1+\sin(\frac{k}{n})}$$

(b) $$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

**Aufgabe 2** (10 Punkte)**.** Seien $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$$

**Aufgabe 3** (10 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $$\int \sin^2(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

(b) $$\int \frac{1}{1+\cos(t)}\, \mathrm{d}t$$ **Tipp:** $\dfrac{\sin(t)}{1+\cos(t)} = u$

(c) $$\int \sinh(t)\, \cos(t)\, \mathrm{d}t$$ wobei $\sinh(t) := \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

(d) $$\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\, \mathrm{d}t$$ **Tipp:** $t^2+1 = u$

(e) $$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\, \mathrm{d}t$$

**Aufgabe 4** (10 Punkte)**.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass $f$ eine Regelfunktion ist, falls $f$ monoton wachsend ist auf $[a,b]$.

(b) Ist $f$ auch dann schon eine Regelfunktion, wenn $f$ nur auf $(a,b)$ als monoton wachsend vorausgesetzt wird? (Beweis oder Gegenbeispiel)

***bitte wenden***

**Aufgabe 5** (10 Punkte + 5 Zusatzpunkte*)**.**

(a) Gegeben seien zwei Regelfunktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Es gelte $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$). Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ \leq \ \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

(b) Gegeben seien $-\infty < a < b < c < \infty$. Zeigen Sie: Ist $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Regelfunktion, dann sind auch die Einschränkungen von $f$ auf die Teilintervalle $[a, b]$ und $[b, c]$ wieder Regelfunktionen und es gilt

$$\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x.$$

(c)* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion auf dem Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Weiter gebe es eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{[a,b]} \ = \ 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $f$ ebenfalls eine Regelfunktion ist und dass gilt

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

**Zusatzaufgabe*** (10 Punkte)**.** In dieser Aufgabe wollen wir die *Irrationalität von $\pi^2$ (und damit natürlich insbesondere die Irrationalität von $\pi$ selbst)* beweisen.
Hierzu verfahren wir wie folgt: Wir nehmen an, die Zahl $\pi^2$ wäre entgegen der Behauptung rational. Wegen $\pi^2 > 0$ können wir dann $a, b \in \mathbb{N}$ finden mit $\pi^2 = \frac{a}{b}$. Beweisen Sie nun unter dieser Annahme die folgenden Aussagen für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ und führen Sie diese anschließend (durch geeignete Wahl von $n$) zu einem Widerspruch:

(a) An den beiden Stellen 0 und 1 sind alle Ableitungen der Funktion

$$f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{n!} x^n (1 - x)^n$$

ganzzahlig. Ferner gilt $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ für alle $x \in (0, 1)$.

(b) Die Werte $F(0)$ und $F(1)$ der Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$F(x) := b^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2(n-k)} f^{(2k)}(x),$$

sind beide ganzzahlig und es gilt

$$I := \pi \int_0^1 a^n f(x) \sin(\pi x)\ \mathrm{d}x = F(0) + F(1).$$

**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst, dass die Ableitung der Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G(x) := F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)$ gegeben ist durch $G'(x) = \pi^2 a^n f(x) \sin(\pi x)$.

(c) Für das Integral $I$ aus (b) gilt $0 < I \leq \dfrac{\pi a^n}{n!}$.