Analysis I

1. Beweisprinzipien

1.1. Aussagenlogik:

Aussagen können wahr oder falsch sein,
niemals beides gleichzeitig

Bildung neuer Aussagen aus gegebenen Aussagen:

i) Negation: $\neg A$ nicht A

ii) Konjunktion: $A \wedge B$ A und B

iii) Disjunktion: $A \vee B$ A oder B

(kein entweder-oder, sondern einschließendes)

iv) Implikation: $A \Rightarrow B$ aus A folgt B

v) Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ A ist äquivalent zu B
A genau dann wenn B
gdw

Veranschaulichung durch Wahrheitstafel

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	w	f	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Regeln:

- $A \wedge \neg A$ immer falsch
- $A \vee \neg A$ immer wahr
- $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

  $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
- $A \Rightarrow B$ äquivalent zu $\neg A \vee B$

"Wenn $1+1=3$, dann ist Paris die Hauptstadt von Deutschland"

ist wahre Aussage.

Aus einer falschen Aussage kann man alles beweisen.

1.2. Axiome: Grundlegende Aussagen, die nicht weiter zurückgeführt werden, heißen Axiome. Axiome sind die apriori gegebenen wahren Aussagen der Mathematik. Alle anderen Aussagen müßen darauf zurückgeführt, bewiesen, werden.

1.3. Direkter Beweis: $A \Rightarrow B$

beweise B, ausgehend von wahrer Aussage A, typischerweise durch Folge von Implikationen

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B,$$

wobei Axiome und schon bewiesene Aussagen benutzt werden.

Beispiel: Das Quadrat einer geraden Zahl ist eine gerade Zahl, d.h.

$$n \in \mathbb{N}, \text{ gerade} \Longrightarrow n^2 \text{ gerade}$$

Beweis: $n \in \mathbb{N}$, gerade

$$\Rightarrow n = 2k \quad \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\underbrace{(2k^2)}_{\in \mathbb{N}}$$

für $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^2$ gerade

$\square$

ebenso: Quadrat von ungerade ist ungerade

1.4. Indirekter Beweis durch Kontraposition:

es gilt: $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\neg B \Rightarrow \neg A]$

da $\neg A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A$

Somit: ~~anstatt~~ $A \Rightarrow B$ können wir beweisen, indem wir $\neg B \Rightarrow \neg A$ zeigen.

Beispiel: Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl ungerade, so ist die Zahl ungerade.

Beweis: Betrachte $n \in \mathbb{N}$

z.z.: n^2 ungerade $\Rightarrow$ n ungerade

dies ist aber äquivalent zu

$$\underbrace{\neg(n \text{ ungerade})}_{n \text{ gerade}} \Rightarrow \underbrace{\neg(n^2 \text{ ungerade})}_{n^2 \text{ gerade}}$$

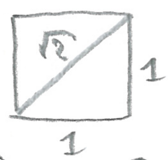
das haben wir in 1.3. schon gezeigt $\square$

ebenso: Quadrat gerade $\Rightarrow$ Zahl gerade

1.5. Indirekter Beweis durch Widerspruch:

Beweise A indem wir zeigen, dass aus $\neg A$ ein Widerspruch folgt

Satz: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



d.h. es gilt keinen Bruch $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{N})$

so dass $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$

<u>Beweis:</u> Annahme: es gilt $a, b \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

Wir können auch annehmen, daß der Bruch gekürzt ist.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

$\Rightarrow a^2$ gerade

$\overset{1.4}{\Rightarrow} a$ gerade, d.h. $a = 2p$ $(p \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow a^2 = 4p^2$

$\Rightarrow 4p^2 = a^2 = 2b^2$

$\Rightarrow b^2 = 2p^2$

$\Rightarrow b^2$ gerade

$\overset{1.4}{\Rightarrow} b$ gerade

also: a, b gerade

Widerspruch dazu, dass $\frac{a}{b}$ gekürzt

$\lightning$ $\square$

1.6. Prinzip der vollständigen Induktion:

Für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei $A(n)$ eine Aussage.

Ferner gelte:

Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr

Induktionsschluss: Für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt:

$$A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

Dann ist $A(n)$ wahr für alle n.

beachte: • Induktion muß verankert werden, d.h. $A(1)$ muß bewiesen werden

• $A(n) \Rightarrow A(n+1)$
muß für alle $n \geq 1$ gelten
(sind Argumente auch für kleines n gültig?)

• Induktion kann auch später starten

$$\left.\begin{array}{l} A(n_0) \text{ wahr} \\ A(n) \Rightarrow A(n+1) \\ \quad \text{für alle } n \geq n_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A(n) \text{ wahr} \\ \text{für alle } n \geq n_0 \end{array}$$

1.7. Notation:

Seien $a_1, \ldots, a_n$ Zahlen. Dann setzen wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

1.8. Satz: Für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: 1) mit Induktion

$n = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$\Rightarrow$ Aussage für $n = 1$ wahr

$n \to n+1$: Sei Aussage wahr für n, d.h. Sei nun n beliebige nat. Zahl

gelte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

z.z.: Aussage ist wahr für $n+1$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

dies gilt, da:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{= \frac{n(n+1)}{2} \text{ (nach Ind. Vor.)}} + n+1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \checkmark$$

beachte: für Induktionsbeweis muß man das Ergebnis schon kennen

2) "intelligentere" Beweis (à la Gauß, 9 jährig ~ 1786)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \dots + n-1 + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = n + n-1 + \dots + 2 + 1$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k \quad \underbrace{(n+1) + (n+1) \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ mal}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \square$$

<u>1.9. Notation:</u> 1) Für $n = 1, 2, 3, \dots$ setzen wir

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ n <u>Fakultät</u>

Außerdem

$0! = 1$

2) Für $0 \leq k \leq n$ setzen wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{Binomialkoeffizient}$$

beachte: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$

1.10. Lemma: Für alle $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascalsches Drei

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Beweis: nachrechnen!

1.11. Satz (Binomische Formel):

Für beliebige Zahlen x, y und natürliches n gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}$$

Beweis: mit Induktion

$n = 1$: $(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k y^{1-k}$

$\shortparallel$ $x+y$

$\shortparallel$ $\binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = y + x$

[beachte: $x^0 := 1$ für alle x]

$\Rightarrow$ Beh. wahr für $n = 1$

$n \to n+1$: Sei Beh. wahr für n, zeige sie für $n+1$!

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right)(x+y) \quad \text{nach Ind.-Annahme}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k}}_{k=\ell-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k+1}}_{k=\ell}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{\ell} y^{n+1-\ell} \qquad \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^{\ell} y^{n+1-\ell}$$

$$= \binom{n}{n} x^{n+1} \cdot y^{0} + \sum_{\ell=1}^{n} \left\{ \underbrace{\left[\binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell} \right]}_{\overset{1.10}{=} \binom{n+1}{\ell}} x^{\ell} y^{n+1-\ell} \right\} + \binom{n}{0} x^{0} y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+1}{\ell} x^{\ell} y^{n+1-\ell} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x^{\ell} y^{n+1-\ell} \qquad \square$$