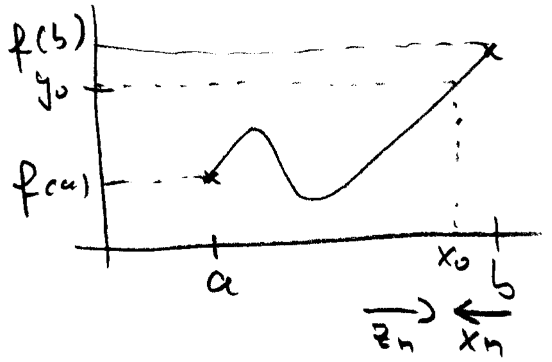
10 Sätze über stetige Funktionen

10.1. Zwischenwertsatz: Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y_0 < f(b)$

Dann gibt es $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$



Beweis: Setze $x_0 := \inf \overbrace{\{ x \in [a,b] \mid f(x) \geq y_0 \}}^{A :=}$

inf existiert da Menge nicht leer $(f(b) \geq y_0)$

8.6. $\Rightarrow \exists (x_n)$ in A mit $x_n \to x_0$

f stetig $\Rightarrow \underbrace{f(x_n)}_{\substack{\geq y_0 \\ \text{da } x_n \in A \\ \forall n}} \to f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \geq y_0$

beachte: $a < x_0$

Betrachte nun Folge (z_n) in $[a, b]$ mit

$\underbrace{z_n < x_0}$ und $z_n \to x_0$ (z.B. $z_n = x_0 - \frac{1}{n}$)

$\Rightarrow z_n \notin A \Rightarrow f(z_n) < y_0$

f stetig $\Rightarrow \underbrace{f(z_n)}_{< y_0} \to f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \leq y_0$

also: $f(x_0) = y_0$

<u>10.2 Korollar:</u> Jede positive reelle Zahl y_0 besitzt eine n-te Wurzel (für $n \geq 2$).

<u>Beweis:</u> $f(x) = x^n$ ist stetig

Setze $a := 0$ und b so groß, dass $b^n > y_0$
(beachte 3.13)

dann $f(a) = 0 < y_0 < b^n = f(b)$

$\overset{ZWS}{\Rightarrow} \exists\, x_0 \in [0, b] : x_0^n = f(x_0) = y_0$

<u>10.3 Bem.:</u> Beachte, dass ZWS nicht die Eindeutigkeit der Wurzel liefert.

Dafür kann man aber so argumentieren:

Sei $x, y > 0$ mit $x^n = y^n$

$\Rightarrow 0 = y^n - x^n = (y-x) \cdot \underbrace{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \ldots + yx^{n-2} + x^{n-1})}_{>0 \text{ da } x,y>0}$

$\Rightarrow (y-x) = 0$

$\Rightarrow y = x$

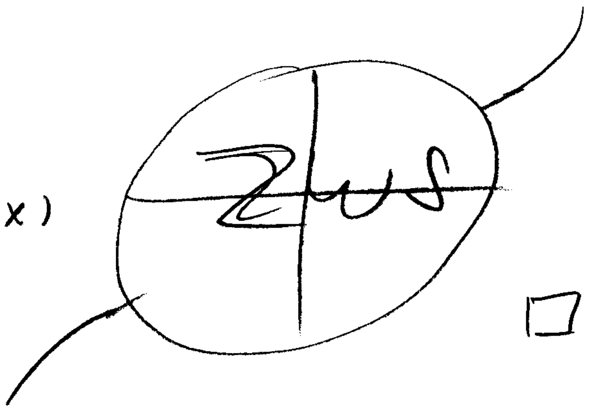
Somit ist x_0 in 10.2. eindeutig und die Notation $x_0 = \sqrt[n]{y_0}$ wohldefiniert.

<u>10.3. Korollar:</u> Jede Polynomfunktion ungeraden Grades $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat mindestens eine Nullstelle.

<u>Beweis:</u> folgt aus der Tatsache, dass

$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \pm\infty$ und

$\lim_{x \to +\infty} p(x) = - \lim_{x \to -\infty} p(x)$



$\square$

<u>10.4. Def.:</u> Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt <u>beschränkt</u>, falls die Menge

$f(D) = \{ f(x) \mid x \in D \}$

beschränkt ist, d.h.

$\exists M > 0 : \quad -M \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in D$

<u>10.5. Satz:</u> Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist f beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an, d.h.

$\exists p, q \in [a,b] : \quad f(p) = \sup f([a,b])$

$\qquad f(q) = \inf f([a,b])$

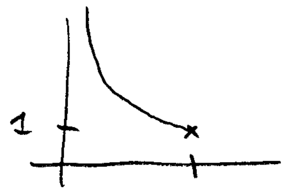
d.h. $\quad f(q) \leq f(x) \leq f(p) \quad \forall x \in [a,b]$

<u>10.6. Bem.:</u> Wesentlich ist, dass $D = [a,b]$ abgeschl.

Der Satz ist falsch für offenes $D = (a,b)$

- $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ nimmt $\sup f((0,1)) = 1$ nicht an

- $f: (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nicht beschränkt



<u>Beweis von 10.5:</u> Setze

$$s := \sup f([a,b]) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ Folge } (s_n)_n \text{ mit } \underbrace{s_n \in f([a,b])}_{\substack{\text{d.h. } s_n = f(x_n) \\ \text{für } x_n \in [a,b]}},\ s_n \to s$$

$(x_n)_n$ ist Folge in $[a,b]$

$\overset{\text{Bolzano-}}{\underset{\text{Weierstraß}}{\Rightarrow}}$ $\exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_k$, welche konvergiert,

d.h. $x_{n_k} \to p$

da $a \le \underset{\substack{\downarrow k \\ p}}{x_{n_k}} \le b \quad \forall k \Rightarrow a \le p \le b$

$$x_{n_k} \to p \overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(x_{n_k})}_{\substack{s_{n_k} \\ \downarrow \\ s}} \to f(p)$$

$\Rightarrow f(p) = s = \sup([a,b]) \Rightarrow s$ endlich

für Infimum analog $\square$

10.7. Def.: $f: D \to \mathbb{R}$ heißt <u>gleichmäßig stetig</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D: \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

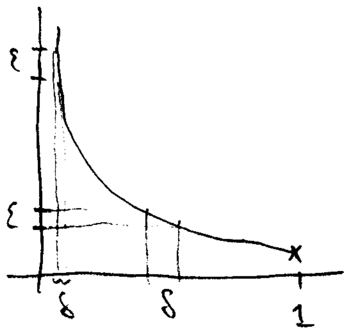
"one δ to rule them all"

[im Gegensatz zu Def. von Stetigkeit darf δ jetzt nicht von x abhängen

$f: D \to \mathbb{R}$ stetig $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in D \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in D: \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ ]$$

10.8. Beispiel: $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig



10.9. Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

<u>Beweis</u>: Annahme: f nicht glm stetig, d. h.

$\exists\, \varepsilon > 0 \;\forall\, \delta > 0 \;\exists\, x, y \in D,\ |x-y| < \delta :$

$$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

also: $\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta = \frac{1}{n} \;\; \exists\, x_n, y_n \in D$ mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$

mit $x_{n_k} \to p \in [a,b]$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ p}}{x_{n_k} - \frac{1}{n_k}} < y_{n_k} < \underset{\substack{\downarrow\ k\to\infty \\ p}}{x_{n_k} + \frac{1}{n_k}} \quad \Rightarrow \quad y_{n_k} \to p \in [a,b]$$

f stetig $\Rightarrow$ $f(x_{n_k}) \to f(p)$

$$f(y_{n_k}) \to f(p)$$

$\Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0$

Wdsp zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon \quad \forall k$

$\square$