11. Logarithmus und allgemeine Potenz

11.1. Def.: $f: D \to \mathbb{R}$ heißt

monoton wachsend $:\Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$

streng —"— $:\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad x_1 < x_2$ —"—

monoton fallend $:\Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ —"—

streng —"— $:\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ —"—

11.2. Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann ist

$f: [a,b] \to [f(a), f(b)]$ bijektiv

und die Umkehrfunktion

$f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a,b]$

ist stetig und streng monoton wachsend.

Analog für "streng monoton fallend"

Beweis: f monoton $\Rightarrow f([a,b]) \subset [f(a), f(b)]$

ZWS 10.1. $\Rightarrow f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

f streng monoton $\Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

oder oder

$x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

$\Downarrow$

f injektiv $\Longleftarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

somit: $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ bijektiv

$\Rightarrow \exists\, f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$

mit $f^{-1}(f(x)) = x$

Beh.: f^{-1} ist stetig, d.h. für $y_n, y \in \overset{[f(a),f(b)]}{\overset{\shortparallel}{D}}$ $(n \in \mathbb{N})$

gilt: $y_n \to y \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(y_n)}_{=: x_n} \to \underbrace{f^{-1}(y)}_{=: x}$

Sei $y_n \to y$

Annahme: $x_n \not\to x$

i) beachte: falls (x_n) konvergiert, $x_n \to \tilde{x}$

$\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $\left.\begin{array}{l} f(x_n) \to f(\tilde{x}) \\ \shortparallel \\ y_n \to f(x) \end{array}\right\}$ $\overset{f \text{ injektiv}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{x} = x$

ii) Nimm an (x_n) konvergiert nicht, d.h.

$\underline{x} := \liminf x_n \neq \limsup x_n =: \overline{x}$

$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f(x_n) = f(\underline{x}) \neq f(\overline{x}) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n)$

$\uparrow$ f injektiv

$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$

$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$

Wdsp.

$\Rightarrow x_n \to x$

d.h. f^{-1} stetig $\square$

11.3. Korollar: Sei $k \in \mathbb{N}$ und

$$f: [0,\infty) \to [0,\infty)$$
$$x \mapsto x^k$$

Dann ist f stetig und streng monoton wachsend und besitzt stetige Umkehrfunktion

$$f^{-1}: [0,\infty) \to [0,\infty)$$
$$x \mapsto \sqrt[k]{x}$$

Beweis: f stetig als Polynomfkt

$x_1 < x_2 \overset{3.7.}{\Rightarrow} x_1^k < x_2^k$, also f streng monoton

Betrachte Einschränkung (für $n \in \mathbb{N}$)

$f_n : [0,n] \to [0,n^k]$

$\overset{11.2.}{\Rightarrow} f_n^{-1} : [0,n^k] \to [0,n]$ stetig

Es gilt $[0,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,n]$ und

$$f([0,\infty)) = [0,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,n^k] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n[0,n]$$

Somit

$f^{-1}(x) = f_n^{-1}(x)$ falls $0 \le x \le n^k$ (unabh. von n)

$\Rightarrow f^{-1}$ stetig auf allen $[0,n^k]$, also auf $[0,\infty)$

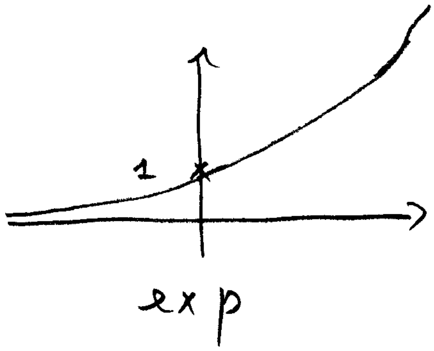
□

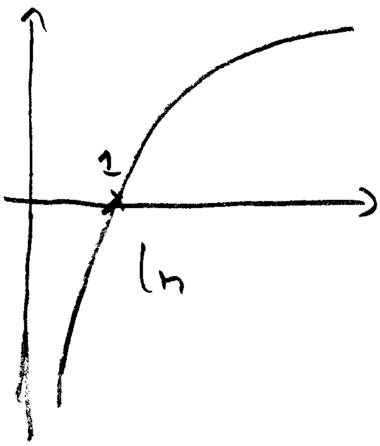
11.4. Korollar: $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist streng monoton wachsend und besitzt stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion

$$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{"Logarithmus"}$$

Es gilt:

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \forall\, x,y > 0$$





Beweis: exp stetig nach 9.12

exp streng monoton wachsend, da:

Sei $x_1 < x_2 \Rightarrow \exp(x_2) = \exp(x_1 + (x_2 - x_1))$

$$= \underbrace{\exp(x_1) \cdot \exp(\underbrace{x_2 - x_1}_{>0})}_{>1}$$

Weiterhin ist $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$, da:

i) $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nach 7.19

also: $\exp(\mathbb{R}) \subset (0,\infty)$

ii) $\exp(n) = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^6}{6} + \ldots \geq 1 + n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exp(-n) = \exp(n)^{-1} \leq (1+n)^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

also: $[\frac{1}{1+n}, 1+n] \subset \exp([-n,n])$

$\Rightarrow (0,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{1+n}, n] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \exp([-n,n]) = \exp(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bijektiv

$\Rightarrow \exists \exp^{-1} = \ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$

Nach 11.2. stetig auf jedem $\exp([-n,n])$, also überall

Sei $x = \exp(s)$, $y = \exp(t)$

$$\Rightarrow \ln(xy) = \ln(\underbrace{\exp(s)\cdot\exp(t)}_{\exp(s+t)})$$

$$= s+t$$

$$= \ln x + \ln y \qquad \square$$

<u>11.5. Bem.:</u> Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty \text{ und } \lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

und

$\ln(e) = 1$

<u>11.6. Definition</u>: Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiere

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a)$$

<u>11.7 Bemerkungen</u>: 1) $f(x) = a^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

2) $x = n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a^x &= \exp(n \cdot \ln a) \\ &= \exp(\underbrace{\ln a + \ldots + \ln a}_{n\text{-mal}}) \\ &= (\underbrace{\exp(\ln a)}_{a})^n \\ &= a^n \end{aligned}$$

3) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a^{x+y} = \exp((x+y)\ln a)$$
$$= \exp(x \ln a + y \ln a)$$
$$= \exp(x \ln a) \cdot \exp(y \ln a)$$
$$= a^x \cdot a^y$$

4) Ebenso einfach sieht man:

$$(a^x)^y = a^{xy}$$
$$a^x b^x = (ab)^x$$
$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

Insbesondere: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

5) Außerdem
$$e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$$

<u>11.8. Satz:</u> Es gilt:

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} x^k e^{-x} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^\alpha = 0 \quad \forall \alpha > 0$

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{-\alpha} \ln x = 0 \quad \forall \alpha > 0$

<u>Beweis</u>: nur (i): $e^x = 1 + \dots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \dots > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$

$\Rightarrow e^{-x} < \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} \Rightarrow e^{-x} \cdot x^k < \frac{(k+1)!}{x} \longrightarrow 0$ für $x \to \infty$