12. Komplexe Zahlen

12.1. Motivation: $\mathbb{R}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen, d. h. es gibt polynomiale Gleichungen ohne Lösungen in $\mathbb{R}$; z. B.

$$x^2 = -1$$

Lösung: Nimm neue "Zahl" i mit $i^2 = -1$ und erweitere $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

*

12.2. Definition: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind definiert durch

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

mit Addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_2)$$

Wir identifizieren $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{C}$ und setzen

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}$$

d. h.

$$(x, y) = x + i \cdot y$$

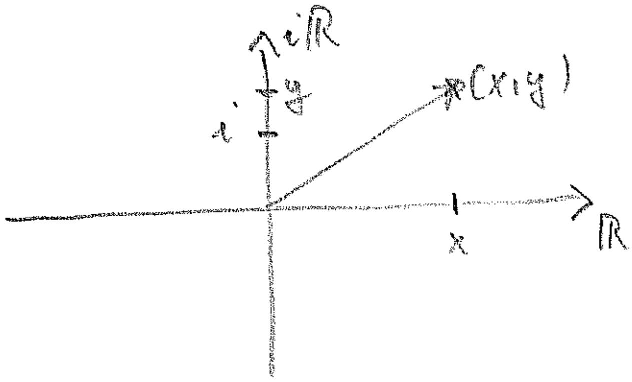
⊗ Dann gilt

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + \underbrace{i^2}_{-1}y_1y_2$$

$$= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

12.3. Bemerkungen: 1) $\mathbb{C}$ kann als Zahlenebene veranschaulicht werden



Addition $\hat{=}$ Addition von Vectoren in $\mathbb{R}^2$

Multiplikation $\rightsquigarrow$ später

2) $\mathbb{C}$ ist Körper (d.h. es gelten die üblichen Rechenregeln für + und $\cdot$)

3) $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden (ansonsten $z^2 \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$, vgl. 3.6, also insbesondere $-1 = i^2 \geq 0$ Wdsp)

4) Man kann sinnvolle Analysis auf $\mathbb{C}$ betreiben, $\mathbb{C}$ ist vollständig. Wesentlich dafür ist Begriff des Abstandes!

5) $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, d.h. es gilt Fundamentalsatz der Algebra: Jede Gleichung

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad (n > 0)$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$ besitzt mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$.

12.4. Notationen: Für $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ setzen wir

(i) $\mathrm{Re}(z) := x$ Realteil

(ii) $\mathrm{Im}(z) := y$ Imaginärteil

(iii) $\bar{z} := x - iy$ Konjugierte von z

(iv) $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ Betrag von z

12.5. Bemerkungen: 1) Es gilt:

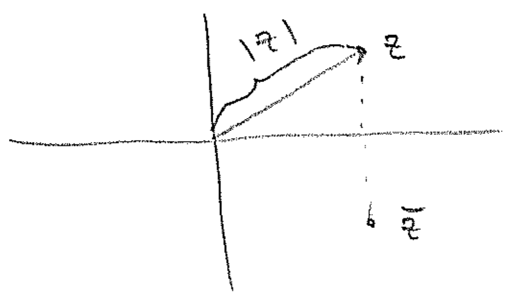
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$$

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$$

2) $z \to \bar{z}$ entspricht Spiegelung an reeller Achse, $|z| \,\hat{=}\,$ Länge des Vektors z in Zahlenebene



12.6. Satz: Für den Betrag in $\mathbb{C}$ gilt:

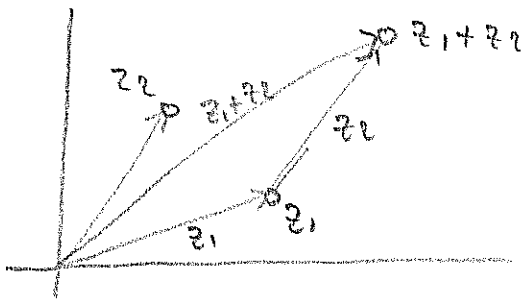
(a) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ und

$$|z| = 0 \iff z = 0$$

(b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(c) Dreiecksungleichung

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$



Beweis: (a), (b) nachrechnen

(c) $$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$$

$$= \underbrace{z_1\overline{z_1}}_{|z_1|^2} + \underbrace{z_2\cdot\overline{z_2}}_{|z_2|^2} + \underbrace{z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}}_{2\,\mathrm{Re}\,(z_1\cdot z_2)}$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\underbrace{|\mathrm{Re}\,(z_1\cdot z_2)|}_{\leq |z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|}$$

$$= (|z_1| + |z_2|)^2$$

beide $|z_1+z_2|, |z_1|+|z_2| \geq 0 \implies |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ $\square$

12.7. Definition: Eine Folge (z_n) komplexer Zahlen konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : |z - z_n| < \varepsilon$$

Bez: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$

12.8. Satz: Sei (z_n) Folge komplexer Zahlen. Dann sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z)$

und

$\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z)$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Folgt aus

$$|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z)| = |\mathrm{Re}(z_n - z)|$$
$$\leq |z_n - z|$$

und analoger Ungl. für Im

(ii) $\Rightarrow$ (i): Folgt aus

$$|z - z_n|^2 = |\underbrace{\mathrm{Re}(z - z_n)}_{\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z_n)}|^2 + \underbrace{|\mathrm{Im}(z - z_n)^2|}$$

$\to 0 \qquad \to 0$

$\square$

12.9. Satz: Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ mit $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dann gilt:

(i) $a_n + b_n \to a + b$

(ii) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

(iii) $\overline{a_n} \to \overline{a}$

(iv) falls $a \neq 0$: $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{a}$

Beweis: wie für $\mathbb{R}$, z.B.

(i) $|(a+b) - (a_n + b_n)| =$

$= |(a - a_n) + (b - b_n)|$

$\leq \underbrace{|a - a_n|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|b - b_n|}_{< \varepsilon}$

(ii) $|ab - a_n b_n| = |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n|$

$\leq |a - a_n| \cdot |b| + \underbrace{|a_n|}_{\leq C} |b - b_n|$ glm Schranke $\forall n$

$\to 0$

(iii) $|\overline{a} - \overline{a_n}| = |a - a_n| \to 0$

(iv) $\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{a_n - a}{a\, a_n}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a|\,|a_n|} \leq C\, |a_n - a|$

glm Schranke für $\frac{1}{|a||a_n|}$ $\square$

<u>12.10. Definition:</u> Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt <u>Cauchy-Folge</u>, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N : |z_n - z_m| < \varepsilon$$

<u>12.11. Satz:</u> (z_n) ist Cauchy-Folge

$\Longleftrightarrow$ $(\mathrm{Re}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen

<u>Beweis:</u> $|\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z_m)| = |\mathrm{Re}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m|$

$\mathrm{Im}(\cdot)$ analog

$$|z_n - z_m| \leq |\mathrm{Re}(z_n - z_m)| + |i|\,|\mathrm{Im}(z_n - z_m)|$$
$$= |\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z_m)| + |\mathrm{Im}(z_n) - \mathrm{Im}(z_m)| \quad \square$$

<u>12.12. Korollar:</u> $\mathbb{C}$ ist vollständig, d. h. jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert gegen einen Grenzwert in $\mathbb{C}$.

<u>12.13. Definition:</u> Eine Reihe $\sum a_n$ von komplexen Zahlen heißt absolut <u>konvergent</u>, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert

12.14. Satz: Jede absolut konvergente Reihe von komplexen Zahlen konvergiert.

Beweis: Betrachte Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Beh: (s_n) ist Cauchy!

denn: $n > m$

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \qquad (\Delta\text{-Ungleichung})$$

$$= |t_n - t_m| \qquad \text{wobei } t_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

$$< \varepsilon$$

für n, m hinreichend groß

(da $\sum |a_k|$ konvergiert, $(t_n)_n$ also Cauchy) □

12.15. Korollar: (*)

12.16. Bemerkung: 1) Betrachtungen über Summierbarkeit können auch auf komplexe Folgen übertragen werden (mit gleichen Beweisen, nur bei 7.10. muß Real- und Imaginärteil gesondert betrachtet werden).

2) Insbesondere gilt: Jede absolut konvergente Reihe kann beliebig umgeordnet werden und bleibt absolut konvergent (mit dem selben Grenzwert)

12.15. Korollar: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent, insbesondere konvergent und definiert daher eine Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Beweis: Reihe ist absolut konvergent, da

$$\sum \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum \frac{|z|^n}{n!} = \exp(|z|)$$

konvergiert nach 7.15. (beachte: $|z| \in \mathbb{R}$)

12.17. Satz: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$$

Beweis: wie im Reellen

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \sum_{j\geq 0} \frac{z^j}{j!} \cdot \sum_{k\geq 0} \frac{w^k}{k!}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \sum_{j+k=n} \frac{z^j \cdot w^k}{j!\,k!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w$$

(beachte: binomische Formel folgt aus Körperaxiomen, gilt also auch

12.18. Bemerkungen: 1) Wie in $\mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

da: $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$

2) Anders als in $\mathbb{R}$ ist $\exp(z) \not> 0$ im allg.

es gilt zwar $\exp(z) = \left(\exp\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2$,

aber da $\mathbb{C}$ nicht angeordnet, muß Quadrat nicht ≥ 0 sein

3) Wir schreiben auch:

$$\exp(z) = e^z$$

12.19. Definition: Sei $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z \in D$, falls eine (und damit beide) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) Für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \to z$ gilt: $f(z_n) \to f(z)$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall w \in D: |z-w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \varepsilon$

f heißt stetig in D, falls f stetig in jedem Punkt von D ist.

[Beweis von (i) $\Leftrightarrow$ (ii) genauso wie im Reellen, 9.8.]

<u>12.20. Beispiele:</u> 1) $z \mapsto \bar{z}$ ist stetig, da $z_n \to z \Rightarrow \bar{z}_n \to \bar{z}$ (vgl. 12.9)

2) Wenn $f, g: D \to \mathbb{C}$ stetig, dann auch $f+g$ und $f \cdot g$

3) f stetig, $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in D$

$\Rightarrow \frac{1}{f(z)}$ stetig

4) f, g stetig $\Rightarrow f \circ g$ stetig

(falls Komposition Sinn macht, d.h. Bild $g \subset D_f$)

5) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig

<u>12.21. Satz:</u> $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig

<u>Beweis:</u> 1) exp ist stetig in 0:

$$|\exp(z) - \exp(0)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right|$$

$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \qquad \text{falls } |z| < \tfrac{1}{2}$$

$$= |z| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|}{1-|z|} \leq 2|z|$$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für z mit

$|z - 0| = |z| < \delta$: $|\exp(z) - \exp(0)| < 2\delta = \varepsilon$

2) exp stetig in $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig:

$$|\exp(z_0) - \exp(\underbrace{z_0 + t}_{z})| = |\exp(z_0)| \, |1 - \exp(t)|$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2\,|\exp(z_0)|}, \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Für $|z - z_0| < \delta$ gilt:

$$|\exp(z_0) - \exp(z)| \leq |\exp(z_0)| \underbrace{\cdot 2|t|}_{< \frac{\varepsilon}{|\exp(z_0)|}} < \varepsilon$$

$\square$